

Analisi 1

Guida alla preparazione dell'esame

Per i corsi di laurea scientifici e di ingegneria

Basata sui programmi più diffusi nelle università italiane

Roberto Rinaldi

www.rinaldiroberto.it

Edizione 2026.04

Indice

Analisi di funzioni di 1 variabile	4
1 Limiti	4
1.1 Algoritmo generale	4
1.2 Valutazione diretta	4
1.3 Cambi di variabile	14
1.4 Frazioni tra polinomi	14
1.4.1 Esercizi $x \rightarrow 0$	15
1.4.2 Esercizi $x \rightarrow \infty$	17
1.5 Frazioni tra somme algebriche di funzioni analitiche	19
1.5.1 Esercizi	21
1.6 Radicali	22
1.6.1 3a: completamento della somma o differenza tra potenze	22
1.6.2 3b: sviluppo del radicale o della potenza	23
1.6.3 Esercizi	24
1.7 Logaritmi	25
1.7.1 Esercizi	25
1.8 Funzioni trigonometriche e iperboliche	26
1.8.1 Esercizi	27
1.9 Funzioni trigonometriche inverse	28
1.10 Esponenziali	28
1.10.1 Esercizi	28
1.11 Polinomi che hanno come variabile una funzione	28
1.11.1 Esercizi	28
1.12 Ordini di infinitesimi	28
1.13 Funzioni dove la x appare sia alla base che all'esponente	29
1.14 Dominio di una funzione e limiti	30
1.15 Soluzioni	31
2 Derivate	79
2.1 Derivate delle funzioni fondamentali	80
2.1.1 Esponenziali e logaritmi con base generica	80
2.1.2 Funzioni trigonometriche	80
2.1.3 Funzioni trigonometriche inverse	80
2.1.4 Funzioni iperboliche	80
2.1.5 Funzioni iperboliche inverse	80
2.1.6 Formule utili	81
2.2 Regole di derivazione	81
2.2.1 Combinazioni lineari	81
2.2.2 Moltiplicazioni e divisioni	81
2.2.3 Funzioni composte	81
2.2.4 Funzioni inverse	81
2.2.5 Funzioni definite tramite integrale	82
2.3 Algoritmo generale	82
2.4 Derivate con potenze al denominatore	83
2.5 Derivate di prodotti o frazioni con radici	84
2.6 Soluzioni	85
3 Funzioni continue	90
3.1 Soluzioni	92

4	Integrali	94
4.1	Integrali per parti	94
4.2	Integrali di frazioni tra polinomi	95
4.2.1	Parte I: Scomposizione in fratti semplici	95
4.2.2	Parte II: Integrazione dei fratti semplici	96
4.3	Tutti i tipi di integrali	97
5	Studio di insiemi	98
6	Studi di funzione	100
6.1	Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni	100
6.2	Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico	102
7	Equazioni nel campo dei numeri complessi	102
8	Equazioni differenziali	103
8.1	Equazioni differenziali a variabili separabili	103
8.2	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	104
8.2.1	Teoria	104
8.2.2	Esercizi	104
8.3	Equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti	104
8.4	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti	105
9	Serie numeriche	105
9.1	Criterio del confronto asintotico per serie	105
9.1.1	Esercizi guidati sul confronto asintotico	106
9.2	Serie a segno alterno e criterio di Leibniz	107
9.3	Cosa fare se a_n non è né a segni alterni, né definitivamente positiva e né definitivamente negativa	107
9.4	Esercizi	107
10	Formulario	108
10.1	Valori e Limiti Importanti di Funzioni Fondamentali	108
10.2	Formulario di Trigonometria	110
10.2.1	Identità fondamentale della trigonometria	110
10.2.2	Formule di Somma e Sottrazione	110
10.2.3	Formule di Bisezione	110
10.2.4	Formule Parametriche (o di Prostaferesi)	110
10.2.5	Formule di Duplicazione	110
10.2.6	Formule di Triplicazione	111
10.2.7	Formule di Conversione Angolo-Area	111
10.3	Derivate	111
10.3.1	Derivate notevoli	111
10.3.2	Regole di derivazione	112
10.4	Sviluppi di Taylor e di Maclaurin	113
10.4.1	Sviluppo di Taylor	113
10.4.2	Sviluppo di Maclaurin	113
10.5	Asintoti	113
10.5.1	Asintoti Verticali	113
10.5.2	Asintoti Orizzontali	114
10.5.3	Asintoti Obliqui	114
10.6	Integrali	114
10.6.1	Integrali notevoli	114
10.6.2	Regole di integrazione	115
10.6.3	Integrali di Funzioni Razionali	115

11 Glossario	115
11.1 Funzioni	115
11.1.1 Punti Estremanti e Punti Critici di una Funzione	116
11.1.2 Punti Estremanti e Punti Critici di una Funzione	118

Analisi di funzioni di 1 variabile

1 Limiti

1.1 Algoritmo generale

1. Valutare direttamente l'espressione nel valore verso cui tende la variabile.
2. Se compare un termine del tipo $a(x)^{b(x)}$, riscriverlo nella forma

$$e^{b(x)\ln(a(x))}.$$

3. Ricondurre i singoli blocchi a una forma standard.
 - (a) Somme o differenze tra potenze e radicali;
 - (b) Potenze o radicali singoli;
 - (c) Logaritmi;
 - (d) Funzioni trigonometriche;
 - (e) Funzioni trigonometriche inverse;
 - (f) Esponenziali;
 - (g) Polinomi che hanno come variabile una funzione.
4. Sviluppare al primo ordine non nullo ogni somma algebrica di blocchi.
 - (a) Se si vogliono evitare gli sviluppi di Taylor, la regola di de l'Hopital e i simboli di Landau, costruire opportunamente i limiti notevoli e verificare che il termine dominante non si semplifichi. Se si semplifica, passare ai punti successivi.
 - (b) Se non si vogliono usare i limiti notevoli, oppure se il termine dominante si semplifica, sviluppare in serie di Taylor fino al primo ordine non nullo.
 - (c) Se non si vogliono usare ne' limiti notevoli ne' sviluppi di Taylor, e si e' in presenza di una forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ con derivate semplici, usare la regola di de l'Hopital. Questo metodo e' particolarmente utile quando compare una funzione definita tramite integrale.
5. Usare la gerarchia di infinitesimi e infiniti per individuare il termine dominante, raccoglierlo e semplificarlo.
6. Ripetere il procedimento finche' il limite non assume una forma determinata.

Nei paragrafi seguenti i singoli passaggi dell'algoritmo verranno isolati e allenati separatamente.

1.2 Valutazione diretta

Sia l un numero reale finito e non nullo. Nella lista seguente compaiono alcuni esiti elementari della valutazione diretta. Useremo anche i simboli:

- \nexists_{lim} : il limite non esiste, ma la funzione resta limitata;
- \nexists_{ill} : il limite non esiste e la funzione non resta limitata.

1. $+\infty - \infty$: forma indeterminata.
2. $0 \cdot 0 = 0$.
3. $\infty \cdot \infty$: esito di modulo infinito; il segno si ricava dai fattori.
4. $0 \cdot \infty$: forma indeterminata.

5. $\frac{0}{l} = 0$.
6. $\frac{l}{0}$: esito di modulo infinito; il segno si determina separatamente.
7. $\frac{0}{\infty} = 0$.
8. $\frac{\infty}{l}$: esito di modulo infinito; il segno dipende dal segno di l .
9. $\frac{l}{\infty} = 0$.
10. $\frac{\infty}{0}$: esito di modulo infinito; il segno si determina separatamente.
11. $\frac{\infty}{\infty}$: forma indeterminata.
12. $\frac{0}{0}$: forma indeterminata.
13. $l + \#_{\text{lim}}: \#_{\text{lim}}$.
14. $l + \#_{\text{ill}}: \#_{\text{ill}}$.
15. $l \cdot \#_{\text{lim}}: \#_{\text{lim}}$.
16. $l \cdot \#_{\text{ill}}: \#_{\text{ill}}$.
17. $\frac{\#_{\text{lim}}}{l}: \#_{\text{lim}}$.
18. $\frac{\#_{\text{lim}}}{\infty} = 0$.
19. $\frac{\#_{\text{ill}}}{l}: \#_{\text{ill}}$.
20. $\frac{\#_{\text{ill}}}{\infty}$: forma indeterminata.
21. $a^\infty = \infty$, se $a > 1$.
22. $a^{-\infty} = 0$, se $a > 1$.
23. $a^\infty = 0$, se $0 < a < 1$.
24. $a^{-\infty} = +\infty$, se $0 < a < 1$.
25. $a^0 = 1$, per ogni valore di $a \neq 0$.
26. 1^∞ : forma indeterminata.
27. 0^0 : forma indeterminata.
28. ∞^0 : forma indeterminata.
29. $\ln(0^+) = -\infty$.
30. $\ln(1) = 0$.
31. $\ln(e) = 1$.
32. $\ln(+\infty) = +\infty$.

33. $\sin(+\infty)$: \nexists_{lim} .
34. $\sin(-\infty)$: \nexists_{lim} .
35. $\cos(+\infty)$: \nexists_{lim} .
36. $\cos(-\infty)$: \nexists_{lim} .
37. $\tan(+\infty)$: \nexists_{ill} .
38. $\tan(-\infty)$: \nexists_{ill} .
39. $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.
40. $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

Negli esercizi seguenti bisogna valutare direttamente l'espressione nel valore verso cui tende la variabile. Se si ottiene una forma determinata, bisogna calcolare il limite. Se si ottiene una forma indeterminata, bisogna indicarne il tipo. Se il risultato dipende dal segno oppure l'espressione non ammette limite, bisogna specificarlo esplicitamente.

Regola pratica. Nella grande maggioranza dei casi la sostituzione diretta basta per concludere. L'unica eccezione rilevante, tra le funzioni non continue non definite a tratti, riguarda le frazioni.

1. Eseguire sempre la sostituzione;
2. Se dopo la sostituzione si ottiene una forma determinata con 0 al denominatore, calcolare separatamente il limite destro e il limite sinistro;
3. Se i due risultati coincidono, quello e' il valore del limite;
4. Se i due risultati non coincidono, il limite non esiste;
5. Negli altri casi, la sostituzione diretta conclude l'esercizio.

1.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - x^3 - 6)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3e^4$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{1 + 2 \cos x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \left(\sin x + \frac{1}{2} \right)^2$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{2x + 8} - 3x)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow -4} e^{-1}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \ln x}{\ln x - 1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.9](#)

10.

$$\lim_{x \rightarrow e} (4 - \ln x^2)$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \log_2(5 - x)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.11](#)

12.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\tan x + 1}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} e^{2 \cos x - 1}$$

14.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\log_{\frac{1}{2}} x - 1}{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \arcsin(2 \sin x - 1)$$

16.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.17](#)

18.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^2 + 1)$$

19.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{5}{x^6} \right)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.19](#)

20.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{x - 1}$$

21.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\sin x + \sqrt{3}}$$

22.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \arccos(2 \cos x - 1)$$

23.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_3\left(\frac{x+1}{3}\right)}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

24.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin x \cos x)$$

25.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.25](#)

26.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \log \frac{1}{x}$$

27.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^6 - x^3)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.27](#)

28.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.28](#)

29.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.29](#)

30.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{3x-12}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.30](#)

31.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \arctan\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

32.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} e^{\tan x + 1}$$

33.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2^{-\cos x + \frac{1}{2}} - 1}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

34.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \arctan\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$$

35.

$$\lim_{x \rightarrow 81} \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}} + x^0\right)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.35](#)

36.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.36](#)

37.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.37](#)

38.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.38](#)

39.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\arctan x)$$

40.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cos x} - \frac{1}{2}$$

41.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \frac{3^{\sin x + \frac{1}{2}} - 1}{\tan x + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

42.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \arcsin(\sin x - \cos x)$$

43.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{2x + 8}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.43](#)

44.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3^{3x} - 3^x - 3$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.44](#)

45.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x+3}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.45](#)

46.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\log_2 x - 1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.46](#)

47.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.47](#)

48.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \cos(\arctan x)$$

49.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \arccos(\cos x - \sin x)$$

50.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arctan x - \frac{\pi}{4}} - 1}{\ln x}$$

51.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(e - e^x + 1)$$

52.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + 2^x}{2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.52](#)

53.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2 + x - 1)}{e^x}$$

54.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x^2 - 2x + 1)(x - 1)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.54](#)

55.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{\tan x} \right)$$

56.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \arccos\left(\frac{\log_2 x - 1}{5 - 2x}\right)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.56](#)

57.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\pi}$$

58.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{e - e^x}{2}\right)$$

59.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\log_4(2x)}{\arccos x - \frac{\pi}{3}}$$

60.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arccos\left(\frac{e^x - e}{2}\right)$$

61.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$$

62.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\ln x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.62](#)

63.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2}$$

64.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.64](#)

65.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x + \arcsin x$$

66.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \arctan x)$$

67.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1 + \sin x)}{\arcsin x}$$

68.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\arcsin x}$$

69.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{e^x - 1}$$

70.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{3}} x$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.70](#)

71.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x-1}$$

72.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{1}{(x+1)^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.72](#)

73.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.73](#)

74.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \tan(\arcsin x)$$

75.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right)$$

76.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \arcsin x - \frac{\pi}{4}\right)}{\arccos x - \frac{\pi}{4}}$$

77.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\ln x}$$

78.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.78](#)

79.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2-x}{-x-1}$$

80.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.80](#)

81.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(1 + \arctan x - \frac{\pi}{4} \right)$$

82.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\arctan(\tan x) + 1}$$

83.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}$$

84.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \arctan \frac{1}{(2x-3)^2}$$

85.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.85](#)

86.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-x}$$

87.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sin \frac{1}{x^2 - 1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.87](#)

88.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{5^{\sin x - \cos x} - 1}{\ln(1 + \tan x - 1)}$$

89.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln \left(1 + \arccos x - \frac{\pi}{3} \right)$$

90.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x - \arccos x$$

91.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2 x - 2}{-1}$$

92.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin e^x$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.92](#)

93.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1^x}{\tan x}$$

94.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.94](#)

95.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x + \arccos x$$

96.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}} \ln \left(1 + \arcsin x - \frac{\pi}{3} \right)$$

97.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} e^{\arccos x - \frac{\pi}{3}}$$

98.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x \sin x)^2$$

99.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.99](#)

100.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 1$$

101.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.101](#)

102.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln \left(1 + \sin x - \frac{1}{2} \right)$$

103.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} e^{\sin x + \frac{1}{2}}$$

104.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \arcsin \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$$

105.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$$

106.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.106](#)

107.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

108.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+3}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.2.108](#)

109.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \arccos\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

110.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(\ln x)$$

111.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctan(\ln x)$$

1.3 Cambi di variabile

E' possibile ricondurre un limite con variabile che tende a 0, a un valore reale finito oppure a $+\infty$, a un limite equivalente espresso in una nuova variabile.

1. Per passare da $\lim_{x \rightarrow 0}$ a $\lim_{y \rightarrow l}$ si pone $x = y - l$.
2. Per passare da $\lim_{x \rightarrow 0}$ a $\lim_{y \rightarrow \infty}$ si pone $x = \frac{1}{y}$.
3. Per passare da $\lim_{x \rightarrow l}$ a $\lim_{y \rightarrow 0}$ si pone $x = y + l$.
4. Per passare da $\lim_{x \rightarrow l}$ a $\lim_{y \rightarrow \infty}$ si pone $x = \frac{1}{y} + l$.
5. Per passare da $\lim_{x \rightarrow \infty}$ a $\lim_{y \rightarrow 0}$ si pone $x = \frac{1}{y}$.
6. Per passare da $\lim_{x \rightarrow \infty}$ a $\lim_{y \rightarrow l}$ si pone $x = \frac{1}{y-l}$.

Non e' necessario tornare alla variabile iniziale: il valore del limite ottenuto nella nuova variabile coincide con il valore del limite di partenza.

1.4 Frazioni tra polinomi

Generalmente sono limiti per $x \rightarrow 0$. In caso contrario si può eseguire una sostituzione, ma in questo caso saranno necessari dei calcoli per ottenere dei polinomi in forma normale. In alternativa verranno proposti i metodi risolutivi che non richiedono sostituzioni.

1. Ricondursi a una frazione tra polinomi. Se si ha una forma indeterminata, questa sarà del tipo: $\frac{0}{0}$
2. Raccogliere a fattor comune la x di grado più basso al numeratore e al denominatore
3. Semplificare la x.
4. Si è ora in presenza di una forma determinata

Nel caso siano limiti per $x \rightarrow \infty$ oppure $x \rightarrow l$ si può eseguire una sostituzione, ma in questo caso saranno necessari dei calcoli per ottenere dei polinomi in forma normale. In alternativa si hanno delle piccole differenze nel procedimento: Caso $x \rightarrow \infty$:

1. Ricondursi a una frazione tra polinomi. Se si ha una forma indeterminata, questa sarà del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$
2. Raccogliere a fattor comune la x di grado più alto al numeratore e al denominatore
3. Semplificare la x.
4. Si è ora in presenza di una forma determinata

Caso $x \rightarrow l$

1. Ricondursi a una frazione tra polinomi. Se si ha una forma indeterminata, questa sarà del tipo: $\frac{0}{0}$
2. Dividere sia il numeratore che il denominatore per il polinomio $x - l$ grazie alla tabella di Ruffini.
3. Se si è in presenza di una forma indeterminata bisogna ripetere il passaggio precedente fino a che non si ottiene una forma determinata

1.4.1 Esercizi $x \rightarrow 0$

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x}{x^2+2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.2](#)

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2}{x^2+x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.3](#)

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^3+2x^2+x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.4](#)

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+2x^2+1}{-x^4+x^3-1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.5](#)

6.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t^9+2t^2+t}{-4t^9+t^4-3}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.6](#)

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+\frac{2}{5}}{x^2+1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.8](#)

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3}+x}{x^2+\frac{2x}{5}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.9](#)

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x^4+x^2+x}{x^4}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.10](#)

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3+\sqrt{\frac{3}{4}}x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.11](#)

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.12

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.13

14.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.14

15.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.15

16.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{5}{3}}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.16

17.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.17

18.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.18 RICORDA: $\sqrt{x^2} = |x|$

19.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} + \sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.19

20.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x^3}} + (\sqrt{x}+x)^2}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x})^3}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.20

21.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - \sqrt[4]{4x^2+9x}}{\sqrt[3]{27x^3+x^6} + (x + \frac{1}{x})^2}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.21

22.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x+x^2)^3}{x^6 - x^3}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.22

23.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 4^x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.1.23

1.4.2 Esercizi $x \rightarrow \infty$

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{2x+1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x}{x^2+2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2}{x^2+x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.3](#)

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3+2x^2+x}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+2x^2+1}{-x^4+x^3-1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.5](#)

6.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t^9+2t^2+t}{-4t^9+t^4-3}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+\frac{2}{5}}{x^2+1}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{3}+x}{x^2+\frac{2x}{5}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.9](#)

10.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}x^4+x^2+x}{x^4}$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3+\sqrt{\frac{3}{4}}x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.11](#)

12.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.13

14.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.15

16.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{5}{3}}}$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.17

18.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{x}$$

RICORDA: $\sqrt{x^2} = |x|$

19.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x^2 + x + 1}}{\sqrt[3]{27x^3 - 1}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.19

20.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 4\sqrt{x^3}} + (\sqrt{x} + x)^2}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x})^3}$$

21.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{1 + x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(\sqrt[3]{x^2} + x)^{\frac{3}{2}} + x}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.21

22.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - \sqrt{4x^2 + 9x}}{\sqrt[3]{27x^3 + x^6} + (x + \frac{1}{x})^2}$$

23.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 1.4.2.23

24.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 4^x}$$

1.5 Frazioni tra somme algebriche di funzioni analitiche

I limiti che seguono sono risolvibili usando solo i limiti notevoli. Non necessitano, quindi, degli sviluppi in serie di Taylor.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(3x)}{x^2}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{3x^2}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2(2x)}{x^2}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - \cos(3x)}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^3(3x)}$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan x)}{x}$$

12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^2)}{x^2}$$

14.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3}{2 - 2 \cos x^2}$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

16.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$$

18.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln\left(\frac{3+2x}{3}\right)}$$

19.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

20.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x)$$

21.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

22.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{2 - x}$$

23.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{1 + x}{x}\right)$$

24.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$

25.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}$$

26.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}$$

27.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 + 2x}$$

28.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 3x}{x}$$

29.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)^2}{\sin^2 x}$$

30.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}$$

31.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(6x^2 + 5x + 1)}{x}$$

32.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \ln[e(x + 1)]}{x}$$

33.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(1 - e^x)}{e^x - 1}$$

34.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$$

35.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 2)^{\frac{2}{x+1}}$$

36.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{\cos x}{x}}$$

I limiti che seguono possono richiedere gli sviluppi in serie di Taylor. Di seguito una guida utile alla loro risoluzione.

Generalmente sono limiti per $x \rightarrow 0$. In caso contrario si può operare una sostituzione.

1. Ricondursi a una frazione tra somme algebriche di funzioni analitiche. Se si ha una forma indeterminata, questa sarà del tipo: $\frac{0}{0}$
2. Sviluppare tutte le funzioni analitiche in serie di Taylor. Tutte le funzioni al numeratore devono essere sviluppate allo stesso ordine. È possibile fermarsi alla prima potenza di x che non viene semplificata. Lo stesso dicasi per il denominatore
3. Si è ora in presenza di un limite affrontabile con gli altri metodi già affrontati

1.5.1 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos(x))}{\ln(1 - x^2)}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin^2(x)}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{artan}(\cos(x) - 1)}{\cosh(x) - 1}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{e^{3x} - 1}}{\ln(1 - \ln(1 + 3x))}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^9 - x^3 + 2x)}{\tan(5x^{20} - x^4 + 2x)}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x^2+x)-1} - 1}{\ln(x^3 + 1 + \sin(x))}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

9.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$$

10.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$$

11.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1 - \cos(\frac{1}{x}))}{\ln(1 - \frac{1}{x^2})}$$

12.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - 2e^{e^{3(3-x)} - 1}}{\ln(1 - 2\ln(1 + 3(3-x)))}$$

13.
$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 2)^{\frac{1}{(x+1)}}$$

14.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2x})} - 1}{\tan(3\frac{1}{x})}$$

1.6 Radicali

In questa sezione si isolano i punti 3a e 3b dell’algoritmo generale. Quando nel limite compaiono radicali oppure potenze con esponente frazionario, le strategie principali sono due.

Se l’espressione contiene essenzialmente due termini e la cancellazione e’ impedita dalla presenza di una radice, conviene usare il metodo 3a, cioe’ il completamento della differenza tra potenze. Se invece compare una somma algebrica piu’ articolata, oppure il completamento risulta poco naturale, conviene usare il metodo 3b, cioe’ il raccoglimento del termine dominante all’interno del radicale o della potenza e la successiva riduzione alla forma $1 + u(x)$.

Dal punto di vista teorico i due metodi sono equivalenti. La scelta dipende solo dalla convenienza dei calcoli.

1.6.1 3a: completamento della somma o differenza tra potenze

Questo metodo si applica a espressioni del tipo

$$\sqrt[n]{P_1(x)} - P_2(x),$$

dove $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono espressioni algebriche. Uno solo dei due termini puo’ essere sotto radice, oppure possono esserlo entrambi.

L’idea e’ usare l’identita’

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{m=0}^{n-1} a^{n-1-m} b^m,$$

ponendo

$$a = \sqrt[n]{P_1(x)}, \quad b = P_2(x).$$

Algoritmo operativo.

1. Individuare il blocco in cui compare la differenza tra radicali o, piu’ in generale, la differenza tra una radice e una potenza;

2. Moltiplicare e dividere per il completamento

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sqrt[n]{P_1(x)^{n-1-m}} \cdot P_2(x)^m;$$

si ottiene così un limite del tipo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{P_1(x)} - P_2(x)) \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sqrt[n]{P_1(x)^{n-1-m}} \cdot P_2(x)^m \right)}{\sum_{m=0}^{n-1} \sqrt[n]{P_1(x)^{n-1-m}} \cdot P_2(x)^m}$$

3. Sostituire il prodotto al numeratore con la differenza di potenze corrispondente:

$$(\sqrt[n]{P_1(x)} - P_2(x)) \left(\sum_{m=0}^{n-1} \sqrt[n]{P_1(x)^{n-1-m}} \cdot P_2(x)^m \right) = P_1(x) - P_2(x)^n;$$

4. Proseguire con le usuali tecniche algebriche: raccoglimenti, semplificazioni tramite proprietà invariante della divisione, sostituzione finale.

Nel caso più comune delle radici quadrate, il completamento coincide con il coniugato. Si moltiplica quindi e si divide per la somma dei due termini:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{P_1(x)} - P_2(x))(\sqrt{P_1(x)} + P_2(x))}{\sqrt{P_1(x)} + P_2(x)}.$$

Il procedimento è identico sia che la differenza tra radicali compaia al numeratore, sia che compaia al denominatore.

1.6.2 3b: sviluppo del radicale o della potenza

Questo metodo è preferibile quando l'espressione contiene più termini, oppure quando il completamento della differenza tra potenze risulta poco naturale.

Algoritmo operativo.

1. All'interno del radicale o della potenza, raccogliere il termine dominante;
2. Riscrivere l'argomento nella forma

$$M(x)(1 + u(x)), \quad u(x) \rightarrow 0;$$

3. Distribuire la radice o la potenza sul prodotto:

$$\sqrt[n]{M(x)(1 + u(x))} = \sqrt[n]{M(x)} \sqrt[n]{1 + u(x)},$$

oppure, più in generale,

$$(M(x)(1 + u(x)))^\alpha = M(x)^\alpha (1 + u(x))^\alpha;$$

4. Separare il fattore dominante esterno dal fattore che tende a 1;
5. Ricondurre il limite a una forma standard, tipicamente

$$(1 + u(x))^\alpha, \quad \frac{(1 + u(x))^\alpha - 1}{u(x)};$$

6. Concludere con il limite notevole

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1 + u)^\alpha - 1}{u} = \alpha$$

oppure con uno sviluppo di Taylor, se il limite notevole non basta.

1.6.3 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2})$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+9} - 3x)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2} + x)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.3](#)

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \right)$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - 2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.5](#)

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{2x+2}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{x+5}}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{2x}}$$

9.

(Non bastano i limiti notevoli) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.9](#)

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^x}{x}$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{\ln(1+x)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.11](#)

12.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{20} - \sqrt[4]{1+x^{80}}}{x^{10}}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{4-2x^4} - 2 \cos(x^2)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.6.3.13](#)

1.7 Logaritmi

In questa sezione si isola il punto 3c) dell'algorithmo generale. L'idea guida e' sempre la stessa: portare tutti i logaritmi alla base naturale, riunire quelli che si sommano o si sottraggono, raccogliere il termine dominante nel loro argomento e ricondurre tale argomento alla forma $1 + 0$.

Prima di iniziare, bisogna ricordare che il logaritmo e' definito solo per argomento positivo.

Proprieta' da ricordare.

1. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.
2. $\ln(AB) = \ln A + \ln B$.
3. $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$.
4. $\ln(A^\alpha) = \alpha \ln A$.

Algorithmo operativo.

1. Controllare che gli argomenti dei logaritmi siano positivi;
2. Portare tutti i logaritmi alla base naturale;
3. Se compaiono somme o differenze di logaritmi, riunirli in un unico logaritmo usando le proprieta';
4. Nell'argomento del logaritmo, raccogliere il termine dominante;
5. Applicare le proprieta' del logaritmo: il termine dominante esce e il resto si riscrive come logaritmo di $1 + u(x)$;
6. Ridurre il limite a una combinazione di $\ln(1 + u(x))$, $\frac{\ln(1 + u(x))}{u(x)}$ oppure $u(x) \ln(1 + v(x))$;
7. Concludere con il limite notevole

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1$$

Oppure con uno sviluppo di Taylor.

In ogni passaggio si studia solo la forma indeterminata piu' interna. Appena e' stata risolta, si tenta di nuovo la sostituzione e solo dopo si passa all'eventuale forma indeterminata successiva.

In pratica, quando $x \rightarrow \infty$, il passaggio tipico e'

$$\ln(P(x)) = \ln(x^m (1 + u(x))) = m \ln x + \ln(1 + u(x)),$$

Con $u(x) \rightarrow 0$. Quando $x \rightarrow 0$, il passaggio tipico e' invece portare direttamente l'argomento alla forma $1 + u(x)$.

1.7.1 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + x^2) - \ln x}{x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.7.1.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + x^2)}{2 \ln x}$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.7.1.3](#)

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_2(x + x^2) - \ln x)$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(2 + x) - x \ln 2}{\sin^2 x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.7.1.5](#)

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + \ln x)}{\ln x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3) \right) x^3$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.7.1.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{x}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x + x\right)}{x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.7.1.9](#)

1.8 Funzioni trigonometriche e iperboliche

In questa sezione si isola il punto 3d dell'algoritmo generale. L'idea guida e' ricondurre le funzioni trigonometriche e iperboliche a espressioni il cui argomento tende a zero, in modo da poter applicare i limiti notevoli oppure gli sviluppi di Taylor gia' noti.

Proprieta' da ricordare.

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.
2. $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.
3. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
4. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
5. $\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$.
6. $\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$.

Algoritmo operativo.

1. Individuare la funzione trigonometrica o iperbolica il cui argomento non tende a zero;
2. Se l'argomento $u(x)$ tende a un valore finito l , riscriverlo nella forma

$$u(x) = (u(x) - l) + l;$$

3. Applicare la formula di addizione corrispondente per separare la parte variabile $u(x) - l$ dalla parte costante l ;
4. Ridurre cosi' l'espressione a una combinazione di funzioni valutate in $u(x) - l$, il cui argomento tende a zero;
5. Se compaiono seno, coseno, seno iperbolico o coseno iperbolico di un argomento che tende a zero, concludere con i limiti notevoli oppure con gli sviluppi di Taylor;

6. Se compare tangente, ricondurla a seno e coseno oppure usare direttamente la formula di addizione della tangente;
7. Ripetere il procedimento finche' tutta l'espressione e' stata ricondotta a blocchi standard.

In pratica, se $u(x) \rightarrow l$, il passaggio tipico e' uno dei seguenti:

$$\begin{aligned}\sin(u(x)) &= \sin((u(x) - l) + l), & \cos(u(x)) &= \cos((u(x) - l) + l), \\ \sinh(u(x)) &= \sinh((u(x) - l) + l), & \cosh(u(x)) &= \cosh((u(x) - l) + l).\end{aligned}$$

Dopo l'applicazione delle formule di addizione, la nuova variabile $u(x) - l$ tende a zero e il limite rientra nei casi gia' studiati.

1.8.1 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{x^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.1](#)

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\arctan x) - 1) x^2$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - \pi) + 1}{x^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.3](#)

4.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - 1}{(x - \pi)^2}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.5](#)

6.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.7](#)

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\arctan x)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.9](#)

10.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1.8.1.11](#)

1.9 Funzioni trigonometriche inverse

1.10 Esponenziali

1.10.1 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 2^x}{x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$$

1.11 Polinomi che hanno come variabile una funzione

1.11.1 Esercizi

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 2 \cos x + 1}{x^4}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(e+x) - 2 \ln(e+x) + 1}{x^2}$$

1.12 Ordini di infinitesimi

Si utilizzino i gli sviluppi di Taylor per calcolare gli ordini di infinitesimo delle seguenti funzioni per $x \rightarrow 0$

1.

$$e^x - (1 + \sin(x))$$

2.

$$\cos(x) - 3 \frac{\sin(x)}{x} + 2$$

3.

$$\cos(x) - 2e^x + \ln(1+x) + 1 + x$$

4.

$$\cos(x) - 1 + \frac{\sin^2(x)}{2}$$

5.

$$\sin(x) - x \cos(x) - \frac{x^3}{3}$$

6.

$$\frac{\sin(x)}{x} - e^x + \ln(x+1)$$

7.

$$x \ln(x+1) + 2 \cos(x) - 2$$

8.

$$\cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x^2) - 1$$

9.

$$x \ln(1 - x/2) - \cos(x) + 1$$

1. Sviluppo di Taylor della funzione esponenziale e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8)$$

2. Sviluppo di Taylor della funzione seno $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

3. Sviluppo di Taylor della funzione coseno $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

4. Sviluppo di Taylor del logaritmo naturale $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^8)$$

5. Sviluppo di Maclaurin della funzione $(1+x)^n$ (con n non necessariamente intero):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^5 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}x^6 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7!}x^7 + \mathcal{O}(x^8)$$

6. Sviluppo di Taylor della funzione arcotangente $\arctan(x)$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

1.13 Funzioni dove la x appare sia alla base che all'esponente

Esercizi propedeutici. Risolvere i limiti con i logaritmi e utilizzare i risultati ottenuti per risolvere i limiti con la forma indeterminata 1^∞ :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

4.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$
5.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)$$
6.
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
7.
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x}$$
8.
$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$
9.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)$$
10.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$
11.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$$
12.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$$

Vari limiti con la variabile sia al numeratore che all'esponente:

13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(x)}$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{x-1}}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

1.14 Dominio di una funzione e limiti

Sia $g(x)$ la funzione di una variabile reale definita da

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4}.$$

1. Determinare il dominio di g .
2. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Sia $h(x)$ la funzione di una variabile reale definita da

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + e^x.$$

1. Determinare il dominio di h .

2. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

3. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

Sia $k(x)$ la funzione di una variabile reale definita da

$$k(x) = \log(x^2 + 1) - \tan(x).$$

1. Determinare il dominio di k .

2. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.

3. Calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$.

1.15 Soluzioni

Soluzione esercizio 1.2.1

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - x^3 - 6)$$

Sostituzione $x = -2$.

$$(-2)^4 - (-2)^3 - 6 = 16 + 8 - 6 = 18.$$

Forma ottenuta: 18, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - x^3 - 6) = 18.$$

[Torna all'esercizio 1.2.1](#)

Soluzione esercizio 1.2.7

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{2x + 8} - 3x)$$

Sostituzione $x = -2$.

$$\sqrt{2 \cdot (-2) + 8} - 3 \cdot (-2) = \sqrt{4} + 6 = 2 + 6 = 8.$$

Forma ottenuta: 8, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{2x + 8} - 3x) = 8.$$

[Torna all'esercizio 1.2.7](#)

Soluzione esercizio 1.2.9

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \ln x}{\ln x - 1}$$

Sostituzione $x = 1$.

$$\frac{3 + \ln 1}{\ln 1 - 1} = \frac{3 + 0}{0 - 1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Forma ottenuta: $\frac{3}{-1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \ln x}{\ln x - 1} = -3.$$

[Torna all'esercizio 1.2.9](#)

Soluzione esercizio 1.2.11

$$\lim_{x \rightarrow -3} \log_2(5 - x)$$

Sostituzione $x = -3$.

$$\log_2(5 - (-3)) = \log_2(8) = 3.$$

Forma ottenuta: 3, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \log_2(5 - x) = 3.$$

[Torna all'esercizio 1.2.11](#)

Soluzione esercizio 1.2.17

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\infty + \frac{1}{\infty} = \infty + 0 = +\infty.$$

Forma ottenuta: $+\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.17](#)

Soluzione esercizio 1.2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{5}{x^6} \right)$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{1}{2 \cdot 0^4} + \frac{5}{0^6} = \frac{1}{0} + \frac{5}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0} + \frac{5}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{1}{2(0^+)^4} + \frac{5}{(0^+)^6} = \frac{1}{2 \cdot 0^+} + \frac{5}{0^+} = +\infty + +\infty = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{5}{x^6} \right) = +\infty.$$

Sostituzione $x = 0^-$.

$$\frac{1}{2(0^-)^4} + \frac{5}{(0^-)^6} = \frac{1}{2 \cdot 0^+} + \frac{5}{0^+} = +\infty + +\infty = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{5}{x^6} \right) = +\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{5}{x^6} \right) = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.19](#)

Soluzione esercizio 1.2.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x}$$

Sostituzione $x = -\infty$.

$$\frac{1}{1 - (-\infty)} = \frac{1}{1 + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Forma ottenuta: 0, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.2.25](#)

Soluzione esercizio 1.2.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^6 - x^3)$$

Sostituzione $x = -\infty$.

$$2(-\infty)^6 - (-\infty)^3 = 2 \cdot \infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Forma ottenuta: $+\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^6 - x^3) = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.27](#)

Soluzione esercizio 1.2.28

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{3 \cdot 0^2 + 0 + 4}{2 \cdot 0^2} = \frac{4}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{4}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{3(0^+)^2 + 0^+ + 4}{2(0^+)^2} = \frac{0^+ + 0^+ + 4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2} = +\infty.$$

Sostituzione $x = 0^-$.

$$\frac{3(0^-)^2 + 0^- + 4}{2(0^-)^2} = \frac{0^+ + 0^- + 4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2} = +\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.28](#)

Soluzione esercizio 1.2.29

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1}$$

Sostituzione $x = 1^+$.

$$\frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $+\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.29](#)

Soluzione esercizio 1.2.30

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{3x - 12}$$

Sostituzione $x = 4^+$.

$$\frac{1}{3 \cdot 4^+ - 12} = \frac{1}{12^+ - 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $+\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{3x - 12} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.30](#)

Soluzione esercizio 1.2.35

$$\lim_{x \rightarrow 81} \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}} + x^0 \right)$$

Sostituzione $x = 81$.

$$81^{\frac{1}{4}} - 81^{\frac{1}{2}} + 81^0 = 3 - 9 + 1 = -5.$$

Forma ottenuta: -5 , forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 81} \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}} + x^0 \right) = -5.$$

[Torna all'esercizio 1.2.35](#)

Soluzione esercizio 1.2.36

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$(0^+)^{0^+} = 0^0.$$

Forma ottenuta: 0^0 , forma indeterminata.

Classificazione. Funzione con la variabile sia alla base sia all'esponente.

[Torna all'esercizio 1.2.36](#)

Soluzione esercizio 1.2.37

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 16}$$

Sostituzione $x = 4$.

$$\frac{4 + \sqrt{4}}{4^2 - 16} = \frac{6}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{6}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = 4^+$.

$$\frac{4^+ + \sqrt{4^+}}{(4^+)^2 - 16} = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 16} = +\infty.$$

Sostituzione $x = 4^-$.

$$\frac{4^- + \sqrt{4^-}}{(4^-)^2 - 16} = \frac{6}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 16} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.37](#)

Soluzione esercizio 1.2.38

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Sostituzione $x = 1^-$.

$$\frac{\ln(1-1^-)}{1-1^-} = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$

Forma ottenuta: $-\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.38](#)

Soluzione esercizio 1.2.43

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{2x + 8}$$

Sostituzione $x = 4^-$.

$$\frac{\frac{(4^-)^2}{2} - 2}{2 \cdot 4^- + 8} = \frac{\frac{16}{2} - 2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Forma ottenuta: $\frac{3}{8}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{2x + 8} = \frac{3}{8}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.43](#)

Soluzione esercizio 1.2.44

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3^{3x} - 3^x - 3$$

Sostituzione $x = 1$.

$$3^{3 \cdot 1} - 3^1 - 3 = 3^3 - 3 - 3 = 27 - 3 - 3 = 21.$$

Forma ottenuta: 21, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3^{3x} - 3^x - 3 = 21.$$

[Torna all'esercizio 1.2.44](#)

Soluzione esercizio 1.2.45

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{x + 3}$$

Sostituzione $x = -3$.

$$\frac{-3 + 1}{-3 + 3} = \frac{-2}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{-2}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = -3^-$.

$$\frac{-3^- + 1}{-3^- + 3} = \frac{-2}{0^-} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x + 1}{x + 3} = +\infty.$$

Sostituzione $x = -3^+$.

$$\frac{-3^+ + 1}{-3^+ + 3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 1}{x + 3} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{x + 3} = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.45](#)

Soluzione esercizio 1.2.46

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\log_2 x - 1}$$

Sostituzione $x = 2^-$.

$$\frac{1}{\log_2(2^-) - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Forma ottenuta: $-\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\log_2 x - 1} = -\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.46](#)

Soluzione esercizio 1.2.47

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 2}$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\frac{\infty}{\infty^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty + 2} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

[Torna all'esercizio 1.2.47](#)

Soluzione esercizio 1.2.52

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + 2^x}{2}$$

Sostituzione $x = -\infty$.

$$\frac{\cos(-\infty) + 2^{-\infty}}{2} = \frac{\#_{\lim} + 0}{2} = \frac{\#_{\lim}}{2} = \#_{\lim}.$$

Forma ottenuta: $\#_{\lim}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x + 2^x}{2} = \#_{\lim}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.52](#)

Soluzione esercizio 1.2.54

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x^2 - 2x + 1)(x - 1)}$$

Sostituzione $x = -1$.

$$\frac{1}{((-1)^2 - 2(-1) + 1)(-1 - 1)} = \frac{1}{(1 + 2 + 1)(-2)} = \frac{1}{4 \cdot (-2)} = -\frac{1}{8}.$$

Forma ottenuta: $-\frac{1}{8}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x^2 - 2x + 1)(x - 1)} = -\frac{1}{8}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.54](#)

Soluzione esercizio 1.2.56

$$\lim_{x \rightarrow 2} \arccos\left(\frac{\log_2 x - 1}{5 - 2x}\right)$$

Sostituzione $x = 2$.

$$\arccos\left(\frac{\log_2 2 - 1}{5 - 2 \cdot 2}\right) = \arccos\left(\frac{1 - 1}{1}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\pi}{2}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \arccos\left(\frac{\log_2 x - 1}{5 - 2x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.56](#)

Soluzione esercizio 1.2.62

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\ln x}$$

Sostituzione $x = 1$.

$$\frac{e^1}{\ln 1} = \frac{e}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{e}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = 1^+$.

$$\frac{e^{1^+}}{\ln(1^+)} = \frac{e}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty.$$

Sostituzione $x = 1^-$.

$$\frac{e^{1^-}}{\ln(1^-)} = \frac{e}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{\ln x} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\ln x} = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.62](#)

Soluzione esercizio 1.2.64

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = (1 + 0)^\infty = 1^\infty.$$

Forma ottenuta: 1^∞ , forma indeterminata.

Classificazione. Funzione con la variabile sia alla base sia all'esponente.

[Torna all'esercizio 1.2.64](#)

Soluzione esercizio 1.2.70

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{3}} x$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\log_{\frac{1}{3}}(+\infty) = \frac{\ln(+\infty)}{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{+\infty}{\ln(\frac{1}{3})} = -\infty.$$

Forma ottenuta: $-\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.70](#)

Soluzione esercizio 1.2.72

$$\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{1}{(x+1)^2}$$

Sostituzione $x = -1$.

$$\cos \frac{1}{(-1+1)^2} = \cos \frac{1}{0^+} = \cos(+\infty) = \#_{\text{lim}}.$$

Forma ottenuta: $\#_{\text{lim}}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \cos \frac{1}{(x+1)^2} = \#_{\text{lim}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.72](#)

Soluzione esercizio 1.2.73

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x + \ln(\frac{1}{x})}{x}$$

Sostituzione $x = e$.

$$\frac{\ln e + \ln(\frac{1}{e})}{e} = \frac{1 + (-1)}{e} = \frac{0}{e} = 0.$$

Forma ottenuta: 0, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x + \ln(\frac{1}{x})}{x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.2.73](#)

Soluzione esercizio 1.2.78

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0+1}{\sin 0} = \frac{1}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0}$, forma determinata.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{0^+ + 1}{\sin(0^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sin x} = +\infty.$$

Sostituzione $x = 0^-$.

$$\frac{0^- + 1}{\sin(0^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{\sin x} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin x} = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.78](#)

Soluzione esercizio 1.2.80

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

Sostituzione $x = 1^+$.

$$\frac{1}{(1^+)^2 + 1^+ - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $+\infty$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 + x - 2} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.2.80](#)

Soluzione esercizio 1.2.85

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0.$$

Forma ottenuta: ∞^0 , forma indeterminata.

Classificazione. Funzione con la variabile sia alla base sia all'esponente.

[Torna all'esercizio 1.2.85](#)

Soluzione esercizio 1.2.87

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sin \frac{1}{x^2 - 1}$$

Sostituzione $x = -1^-$.

$$\sin \frac{1}{(-1^-)^2 - 1} = \sin \frac{1}{0^+} = \sin(+\infty) = \#_{\text{lim}}.$$

Forma ottenuta: $\#_{\text{lim}}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sin \frac{1}{x^2 - 1} = \#_{\text{lim}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.87](#)

Soluzione esercizio 1.2.92

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin e^x$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\infty^2 \sin(e^{+\infty}) = \infty \sin(+\infty) = \infty \cdot \#_{\text{lim}}.$$

Forma ottenuta: $\infty \cdot \#_{\text{lim}}$, forma determinata.

Oscillazione. Il fattore x^2 ha modulo infinito: l'espressione non resta limitata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin e^x = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.92](#)

Soluzione esercizio 1.2.94

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\frac{\sqrt{\infty}}{\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

[Torna all'esercizio 1.2.94](#)

Soluzione esercizio 1.2.99

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Forma ottenuta: 0, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.2.99](#)

Soluzione esercizio 1.2.101

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\sin(+\infty) = \#_{\text{lim}}.$$

Forma ottenuta: $\#_{\text{lim}}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = \#_{\text{lim}}.$$

[Torna all'esercizio 1.2.101](#)

Soluzione esercizio 1.2.106

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x^2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$0 \cdot \frac{1}{0^2} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty.$$

Forma ottenuta: $0 \cdot \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

[Torna all'esercizio 1.2.106](#)

Soluzione esercizio 1.2.108

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}$$

Sostituzione $x = +\infty$.

$$\frac{2\infty - 1}{\infty + 3} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

[Torna all'esercizio 1.2.108](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{2x + 1}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0 + 2}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Forma ottenuta: $\frac{2}{1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{2x + 1} = 2.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.1](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{2 \cdot 0^2 + 0}{0^2 + 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{2}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x^2 + 2} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.2](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^3 + 0^2}{0^2 + 0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + x} = \frac{x^2(x + 1)}{x(x + 1)}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x^2(x + 1)}{x(x + 1)} = x$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $x(x + 1)$.

Sostituzione $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.3](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{2 \cdot 0^3}{0^3 + 2 \cdot 0^2 + 0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{2x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{2x^3}{x(x^2 + 2x + 1)}$$

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{2x^3}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{2x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{2 \cdot 0^2}{0^2 + 2 \cdot 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.4](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{-x^4 + x^3 - 1}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^4 + 2 \cdot 0^2 + 1}{-0^4 + 0^3 - 1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{-1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{-x^4 + x^3 - 1} = -1.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.5](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.6

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t^9 + 2t^2 + t}{-4t^9 + t^4 - 3}$$

Sostituzione $t = 0$.

$$\frac{-2 \cdot 0^9 + 2 \cdot 0^2 + 0}{-4 \cdot 0^9 + 0^4 - 3} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{-3}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t^9 + 2t^2 + t}{-4t^9 + t^4 - 3} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.6](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{5}} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per x .

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

Frazione. Proprietà' del quoziente tra frazioni: prodotto per il reciproco.

Sostituzione $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}} = \frac{5}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.7](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.8

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \frac{2}{5}}{x^2 + 1}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^3 + \frac{2}{5}}{0^2 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{1} = \frac{2}{5}.$$

Forma ottenuta: $\frac{2}{5}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \frac{2}{5}}{x^2 + 1} = \frac{2}{5}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.8](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\frac{0^2}{3} + 0}{0^2 + \frac{2 \cdot 0}{5}} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}} = \frac{x \left(\frac{x}{3} + 1 \right)}{x \left(x + \frac{2}{5} \right)}$$

Numeratore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x \left(\frac{x}{3} + 1 \right)}{x \left(x + \frac{2}{5} \right)} = \frac{\frac{x}{3} + 1}{x + \frac{2}{5}}$$

Frazione. Proprietà' invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\frac{0}{3} + 1}{0 + \frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}} = \frac{5}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.9](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x^4 + x^2 + x}{x^4}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 0^4 + 0^2 + 0}{0^4} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\sqrt{2}x^4 + x^2 + x}{x^4} = \frac{x(\sqrt{2}x^3 + x + 1)}{x^4}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x(\sqrt{2}x^3 + x + 1)}{x^4} = \frac{\sqrt{2}x^3 + x + 1}{x^3}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 0^3 + 0 + 1}{0^3} = \frac{1}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0}$, forma determinata.

Numeratore. Sostituzione $x = 0$: valore 1, segno positivo in un intorno di 0.

Denominatore. Proprieta' delle potenze: x^3 conserva il segno di x .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}x^3 + x + 1}{x^3} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2}x^3 + x + 1}{x^3} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}x^4 + x^2 + x}{x^4} \text{ non esiste.}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.10](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0}{0^3 + \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x} = \frac{x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x\left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{x \left(x^2 + \sqrt{\frac{3}{4}} \right)} = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{0^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

Forma ottenuta: $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, forma determinata.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

Frazione. Definizione della divisione: prodotto per il reciproco.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Primo fattore. Proprieta' del reciproco di una radice: il reciproco di $\sqrt{2}$ e' $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Secondo fattore. Proprieta' del reciproco di una radice: il reciproco di $\sqrt{\frac{3}{4}}$ e' $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}$$

Prodotto. Proprieta' distributiva della radice sul prodotto: prodotto di radici con stesso indice.

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}}$$

Radiciando. Proprieta' del prodotto tra frazioni: prodotto tra 2 e $\frac{3}{4}$.

$$\sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Radiciando. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per 2.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.11](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.12

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^{\frac{5}{2}} + 2 \cdot (0^+)^{\frac{1}{2}}}{(0^+)^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot (0^+)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x^2 + 2)}{x^{\frac{1}{2}}(x - 3)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{1}{2}}$.
Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}(x^2 + 2)}{x^{\frac{1}{2}}(x - 3)} = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per $x^{\frac{1}{2}}$.
Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^2 + 2}{0^+ - 3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Forma ottenuta: $-\frac{2}{3}$, forma determinata.
Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.12](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.13

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^{\frac{4}{3}} + (0^+)^{\frac{2}{3}}}{(0^+)^{\frac{4}{3}} + 0^+} = \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.
Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.
Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x} = \frac{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 1)}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}})}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{2}{3}}$.
Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 1)}{x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}})} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per $x^{\frac{2}{3}}$.
Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^{\frac{2}{3}} + 1}{(0^+)^{\frac{2}{3}} + (0^+)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0^+}$, forma determinata.
Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x} = +\infty$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.13](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{0^{+2}} + \sqrt{0^+}}{\sqrt[3]{0^{+2}} + \sqrt[4]{0^+}} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

$$\frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} = \frac{x + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{x}}$$

Numeratore. Proprietà delle radici: $\sqrt{x^2} = x$.

Denominatore. Proprietà delle radici: $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{x + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{4}} (x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}} (x^{\frac{5}{12}} + 1)}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{1}{4}}$.

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{1}{4}}$.

$$\frac{x^{\frac{1}{4}} (x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}} (x^{\frac{5}{12}} + 1)} = \frac{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{5}{12}} + 1}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $x^{\frac{1}{4}}$.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^{\frac{3}{4}} + (0^+)^{\frac{1}{4}}}{(0^+)^{\frac{5}{12}} + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.14](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.15

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^{-1} + 0^{-3}}{0^{-2} + 0} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x} = \frac{x^{-3} (x^2 + 1)}{x^{-3} (x + x^4)}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^{-3} .

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^{-3} .

$$\frac{x^{-3}(x^2+1)}{x^{-3}(x+x^4)} = \frac{x^2+1}{x+x^4}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x^{-3} .

$$\frac{x^2+1}{x+x^4} = \frac{x^2+1}{x(1+x^3)}$$

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Numeratore. Sostituzione $x = 0$: valore 1, segno positivo in un intorno di 0.

Secondo fattore del denominatore. Sostituzione $x = 0$: valore 1, segno positivo in un intorno di 0.

Primo fattore del denominatore. Sostituzione $x = 0$: segno concorde con x .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{x(1+x^3)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{x(1+x^3)} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}+x^{-3}}{x^{-2}+x} \text{ non esiste.}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.15](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.16

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{3}}}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^{-\frac{3}{2}}+(0^+)^{-\frac{5}{2}}}{(0^+)^{\frac{3}{2}}+(0^+)^{-\frac{5}{3}}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Infiniti e infinitesimi mescolati. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{3}}} = \frac{x^{-\frac{5}{2}}(x+1)}{x^{-\frac{5}{2}}(x^4+x^{\frac{5}{6}})}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{-\frac{5}{2}}$.

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{-\frac{5}{2}}$.

$$\frac{x^{-\frac{5}{2}}(x+1)}{x^{-\frac{5}{2}}(x^4+x^{\frac{5}{6}})} = \frac{x+1}{x^4+x^{\frac{5}{6}}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per $x^{-\frac{5}{2}}$.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{0^++1}{(0^+)^4+(0^+)^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0^+}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{5}{3}}} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.16](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.17

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{0+1} + 0}{2 \cdot 0} = \frac{1}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0}$, forma determinata.

Numeratore. Sostituzione $x = 0$: valore 1, segno positivo in un intorno di 0.

Denominatore. Proprietà del prodotto: $2x$ ha il segno di x .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x} = -\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x} \text{ non esiste.}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.17](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{x}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{(0^+)^2 + 4 \cdot 0^+} + 0^+}{0^+} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{x} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x+4} + x}{x}$$

Radiciando. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Radice. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt{x(x+4)} = \sqrt{x}\sqrt{x+4}$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+4} + x}{x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+4} + \sqrt{x})}{x}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore \sqrt{x} .

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+4} + \sqrt{x})}{x} = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per \sqrt{x} .

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{0^+ + 4} + \sqrt{0^+}}{\sqrt{0^+}} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $\frac{2}{0^+}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{x} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.18](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} + \sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{0^+ + (0^+)^2} + \sqrt[4]{(0^+)^2 + 0^+}}{\sqrt[3]{27(0^+)^3 + (0^+)^6}} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\sqrt{x+x^2} + \sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{1+x}}{x\sqrt[3]{27+x^3}}$$

Primo radicando del numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Primo termine del numeratore. Proprieta' distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt{x(1+x)} = \sqrt{x}\sqrt{1+x}$.

Secondo radicando del numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Secondo termine del numeratore. Proprieta' distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt[4]{x(1+x)} = \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{1+x}$.

Radicando del denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

Denominatore. Proprieta' distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt[3]{x^3(27+x^3)} = x\sqrt[3]{27+x^3}$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{x}\sqrt[4]{1+x}}{x\sqrt[3]{27+x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1+x})}{x\sqrt[3]{27+x^3}}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $\sqrt[4]{x}$.

$$\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1+x})}{x\sqrt[3]{27+x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1+x}}{x^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{27+x^3}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per $\sqrt[4]{x}$.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt[4]{0^+}\sqrt{1+0^+} + \sqrt[4]{1+0^+}}{(0^+)^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{27+(0^+)^3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{0^+}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} + \sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt[3]{27x^3+x^6}} = +\infty.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.19](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.20

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x^3}} + (\sqrt{x}+x)^2}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x})^3}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{0^+ + 4\sqrt{(0^+)^3}} + (\sqrt{0^+} + 0^+)^2}{(\sqrt[3]{0^+} + \sqrt[6]{0^+})^3} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x^3}} + (\sqrt{x}+x)^2}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x})^3} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+4\sqrt{x}} + (\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^2}{(\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}+1))^3}$$

Primo radicando del numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Primo termine del numeratore. Proprieta' distributiva della radice sul prodotto: estrazione del fattore \sqrt{x} .

Secondo termine del numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore \sqrt{x} .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $\sqrt[6]{x}$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+4\sqrt{x}}+(\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^2}{(\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}+1))^3} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+4\sqrt{x}}+x(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

Secondo termine del numeratore. Proprieta' distributiva della potenza sul prodotto: $(\sqrt{x}(1+\sqrt{x}))^2 = x(1+\sqrt{x})^2$.

Denominatore. Proprieta' distributiva della potenza sul prodotto: $(\sqrt[6]{x}(\sqrt[6]{x}+1))^3 = \sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+1)^3$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+4\sqrt{x}}+x(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+1)^3} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+4\sqrt{x}}+\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2\right)}{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore \sqrt{x} .

$$\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+4\sqrt{x}}+\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2\right)}{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x}+1)^3} = \frac{\sqrt{1+4\sqrt{x}}+\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}{(\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per \sqrt{x} .

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sqrt{1+4\sqrt{0^+}}+\sqrt{0^+}(1+\sqrt{0^+})^2}{(\sqrt[6]{0^+}+1)^3} = \frac{1}{1} = 1.$$

Forma ottenuta: $\frac{1}{1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x^3}}+(\sqrt{x}+x)^2}{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})^3} = 1.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.20](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - \sqrt[4]{4x^2 + 9x}}{\sqrt[3]{27x^3 + x^6} + (x + \frac{1}{x})^2}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(0^+)^3 - \sqrt[4]{4(0^+)^2 + 9(0^+)}}{\sqrt[3]{27(0^+)^3 + (0^+)^6} + (0^+ + \frac{1}{0^+})^2} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{\infty}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - \sqrt[4]{4x^2 + 9x}}{\sqrt[3]{27x^3 + x^6} + (x + \frac{1}{x})^2} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.21](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\left(\sqrt{0^+} + \sqrt[3]{0^+} + \sqrt[4]{0^+}\right)^{12} + (0^+ + (0^+)^2)^3}{(0^+)^6 - (0^+)^3} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{0}{0}$. Criterio: raccoglimento dell'infinitesimo di grado minore.

$$\frac{(\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3} = \frac{(\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1))^{12} + (x(1+x))^3}{x^3(x^3 - 1)}$$

Primo termine del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $\sqrt[4]{x}$.

Secondo termine del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

$$\frac{(\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1))^{12} + (x(1+x))^3}{x^3(x^3 - 1)} = \frac{x^3(\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1)^{12} + x^3(1+x)^3}{x^3(x^3 - 1)}$$

Primo termine del numeratore. Proprietà distributiva della potenza sul prodotto: $(\sqrt[4]{x}(\dots))^{12} = x^3(\dots)^{12}$.

Secondo termine del numeratore. Proprietà distributiva della potenza sul prodotto: $(x(1+x))^3 = x^3(1+x)^3$.

$$\frac{x^3(\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1)^{12} + x^3(1+x)^3}{x^3(x^3 - 1)} = \frac{x^3((\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1)^{12} + (1+x)^3)}{x^3(x^3 - 1)}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

$$\frac{x^3((\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1)^{12} + (1+x)^3)}{x^3(x^3 - 1)} = \frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} + 1)^{12} + (1+x)^3}{x^3 - 1}$$

Frazione. Proprietà invariante della divisione: divisione per x^3 .

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{(\sqrt[4]{0^+} + \sqrt[12]{0^+} + 1)^{12} + (1 + 0^+)^3}{(0^+)^3 - 1} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Forma ottenuta: $\frac{2}{-1}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3} = -2.$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.22](#)

Soluzione esercizio 1.4.1.23

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 4^x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{2^0 + 3^0}{2^0 - 4^0} = \frac{2}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{2}{0}$, forma determinata.

$$\frac{2^x + 3^x}{2^x - 4^x} = \frac{2^x + 3^x}{2^x - 2^{2x}}$$

Denominatore. Proprietà delle potenze: $4^x = 2^{2x}$.

$$\frac{2^x + 3^x}{2^x - 2^{2x}} = \frac{2^x + 3^x}{2^x(1 - 2^x)}$$

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore 2^x .

Numeratore. Sostituzione $x = 0$: valore 2, segno positivo in un intorno di 0.

Primo fattore del denominatore. Proprietà dell'esponenziale: $2^x > 0$ per ogni x .

Secondo fattore del denominatore. Monotonia dell'esponenziale: $1 - 2^x < 0$ per $x > 0$, $1 - 2^x > 0$ per $x < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x + 3^x}{2^x(1 - 2^x)} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x + 3^x}{2^x(1 - 2^x)} = +\infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x}{2^x - 4^x} \text{ non esiste.}$$

[Torna all'esercizio 1.4.1.23](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{2x + 1}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty + 2}{2\infty + 1} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x + 2}{2x + 1} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{1 + \frac{2}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{2x + 1} = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.1](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty^3 + \infty^2}{\infty^2 + \infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + x} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

$$\frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x^2 .

$$\frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = x$$

Frazione. Proprietà' invariantiva della divisione: divisione per $1 + \frac{1}{x}$.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + x} = \infty.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.3](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{-x^4 + x^3 - 1}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty^4 + 2\infty^2 + 1}{-\infty^4 + \infty^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{-x^4 + x^3 - 1} = \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\right)}$$

Numeratore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^4 .

Denominatore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^4 .

$$\frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}}$$

Frazione. Proprietà' invariantiva della divisione: divisione per x^4 .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{1 + \frac{2}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^4}}{-1 + \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^4}} = \frac{1 + 0 + 0}{-1 + 0 - 0} = -1.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{-x^4 + x^3 - 1} = -1.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.5](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\frac{\infty}{2}}{\frac{\infty}{5}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{x \cdot \frac{1}{5}}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x \cdot \frac{1}{2}}{x \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x .

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

Frazione. Definizione della divisione: prodotto per il reciproco.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}} = \frac{5}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.7](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\frac{\infty^2}{3} + \infty}{\infty^2 + \frac{2\infty}{5}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{5x} \right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

$$\frac{x^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{5x} \right)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{5x}}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x^2 .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{2}{5\infty}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{3} + x}{x^2 + \frac{2x}{5}} = \frac{1}{3}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.9](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\infty}{\infty^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{x^2}\right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

$$\frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}x}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{x^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}x}}{x \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{x^2}\right)}$$

Frazione. Proprieta' invariante della divisione: divisione per x^2 .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}\infty}}{\infty \left(1 + \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\infty^2}\right)} = \frac{1 + 0}{\infty(1 + 0)} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x}{x^3 + \sqrt{\frac{3}{4}}x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.11](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty^{\frac{4}{3}} + \infty^{\frac{2}{3}}}{\infty^{\frac{4}{3}} + \infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x} = \frac{x^{\frac{4}{3}} \left(1 + x^{-\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{4}{3}} \left(1 + x^{-\frac{1}{3}}\right)}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{4}{3}}$.

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{4}{3}}$.

$$\frac{x^{\frac{4}{3}} \left(1 + x^{-\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{4}{3}} \left(1 + x^{-\frac{1}{3}}\right)} = \frac{1 + x^{-\frac{2}{3}}}{1 + x^{-\frac{1}{3}}}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $x^{\frac{4}{3}}$.
Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{1 + \infty^{-\frac{2}{3}}}{1 + \infty^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}} + x} = 1.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.13](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.15

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\infty^{-1} + \infty^{-3}}{\infty^{-2} + \infty} = \frac{0 + 0}{0 + \infty} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{\infty}$, forma determinata.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-3}}{x^{-2} + x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.15](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.17

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sqrt{\infty+1} + \infty}{2\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{\sqrt{x+1} + x}{2x} = \frac{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}{2x}$$

Radiciando. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}{2x} = \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{2x}$$

Radice. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

$$\frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x}{2x} = \frac{x \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} + 1 \right)}{2x}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} + 1 \right)}{2x} = \frac{\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} + 1}{2}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt{\infty}} + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{1+0}}{\infty} + 1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.17](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.19

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{27x^3-1}}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sqrt{\infty+1} + \sqrt[4]{\infty^2+\infty+1}}{\sqrt[3]{27\infty^3-1}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{27x^3-1}} = \frac{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})} + \sqrt[4]{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt[3]{x^3(27-\frac{1}{x^3})}}$$

Primo radicando del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Secondo radicando del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

Radiciando del denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

$$\frac{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})} + \sqrt[4]{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt[3]{x^3(27-\frac{1}{x^3})}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^3\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}}$$

Primo termine del numeratore. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt{x(1+\frac{1}{x})} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

Secondo termine del numeratore. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt[4]{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \sqrt{x}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Denominatore. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: $\sqrt[3]{x^3(27-\frac{1}{x^3})} = x^3\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}$.

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x^3\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore \sqrt{x} .

$$\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^3\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{27-\frac{1}{x^3}}}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per \sqrt{x} .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}} + \sqrt[4]{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}}{\sqrt{\infty}\sqrt[3]{27-\frac{1}{\infty^3}}} = \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt[4]{1+0+0}}{\infty\sqrt[3]{27-0}} = \frac{1+1}{\infty \cdot 3} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{27x^3-1}} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.19](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{1+x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(\sqrt[3]{x^2+x})^{\frac{3}{2}} + x}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sqrt[10]{1+\infty^{10}} - \left(\infty^{\frac{1}{11}} + 1\right)^{10}}{\left(\sqrt[3]{\infty^2 + \infty}\right)^{\frac{3}{2}} + \infty} = \frac{\infty - \infty}{\infty + \infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty - \infty}{\infty + \infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

$$\frac{\sqrt[10]{1+x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(\sqrt[3]{x^2+x})^{\frac{3}{2}} + x} = \frac{\sqrt[10]{1+x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(x^{\frac{2}{3}} + x)^{\frac{3}{2}} + x}$$

Base del primo termine del denominatore. Proprietà delle radici: $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

Forma $\frac{\infty - \infty}{\infty + \infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{\sqrt[10]{1+x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(x^{\frac{2}{3}} + x)^{\frac{3}{2}} + x} = \frac{\sqrt[10]{x^{10} \left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right)} - \left(x^{\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)\right)^{10}}{\left(x \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)\right)^{\frac{3}{2}} + x}$$

Radiciando del primo termine del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^{10} .

Base del secondo termine del numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{1}{11}}$.

Base del primo termine del denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{\sqrt[10]{x^{10} \left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right)} - \left(x^{\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)\right)^{10}}{\left(x \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)\right)^{\frac{3}{2}} + x} = \frac{x \sqrt[10]{1 + \frac{1}{x^{10}}} - x^{\frac{10}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}}{x^{\frac{3}{2}} \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + x}$$

Primo termine del numeratore. Proprietà distributiva della radice sul prodotto: estrazione del fattore x .

Secondo termine del numeratore. Proprietà distributiva della potenza sul prodotto: estrazione del fattore $x^{\frac{10}{11}}$.

Primo termine del denominatore. Proprietà distributiva della potenza sul prodotto: estrazione del fattore $x^{\frac{3}{2}}$.

$$\frac{x \sqrt[10]{1 + \frac{1}{x^{10}}} - x^{\frac{10}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}}{x^{\frac{3}{2}} \left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + x} = \frac{x \left(\sqrt[10]{1 + \frac{1}{x^{10}}} - x^{-\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}\right)}{x^{\frac{3}{2}} \left(\left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore $x^{\frac{3}{2}}$.

$$\frac{x \left(\sqrt[10]{1 + \frac{1}{x^{10}}} - x^{-\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}\right)}{x^{\frac{3}{2}} \left(\left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\sqrt[10]{1 + \frac{1}{x^{10}}} - x^{-\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}}{x^{\frac{1}{2}} \left(\left(x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

Frazione. Proprietà' invariantiva della divisione: divisione per x .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sqrt[10]{1 + \frac{1}{\infty^{10}}} - \infty^{-\frac{1}{11}} \left(1 + \frac{1}{\infty^{\frac{1}{11}}}\right)^{10}}{\infty^{\frac{1}{2}} \left(\left(\infty^{-\frac{1}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} + \infty^{-\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\sqrt[10]{1+0} - 0 \cdot (1+0)^{10}}{\infty^{\frac{1}{2}} \left((0+1)^{\frac{3}{2}} + 0\right)} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{1+x^{10}} - (x^{\frac{1}{11}} + 1)^{10}}{(\sqrt[3]{x^2} + x)^{\frac{3}{2}} + x} = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.21](#)

Soluzione esercizio 1.4.2.23

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{(\sqrt{\infty} + \sqrt[3]{\infty} + \sqrt[4]{\infty})^{12} + (\infty + \infty^2)^3}{\infty^6 - \infty^3} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Forma ottenuta: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni algebriche.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Criterio: raccoglimento dell'infinito di grado maggiore.

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3} = \frac{\left(\sqrt{x} \left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^{12} + \left(x^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right)\right)^3}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}$$

Base del primo termine del numeratore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore \sqrt{x} .

Base del secondo termine del numeratore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^2 .

Denominatore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^6 .

$$\frac{\left(\sqrt{x} \left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^{12} + \left(x^2 \left(\frac{1}{x} + 1\right)\right)^3}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{x^6 \left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + x^6 \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}$$

Primo termine del numeratore. Proprietà' distributiva della potenza sul prodotto: estrazione del fattore x^6 .

Secondo termine del numeratore. Proprietà' distributiva della potenza sul prodotto: estrazione del fattore x^6 .

$$\frac{x^6 \left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + x^6 \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{x^6 \left(\left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3\right)}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}$$

Numeratore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^6 .

$$\frac{x^6 \left(\left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3\right)}{x^6 \left(1 - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\left(1 + x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3}{1 - \frac{1}{x^3}}$$

Frazione. Proprietà' invariantiva della divisione: divisione per x^6 .

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\left(1 + \infty^{-\frac{1}{6}} + \infty^{-\frac{1}{4}}\right)^{12} + \left(\frac{1}{\infty} + 1\right)^3}{1 - \frac{1}{\infty^3}} = \frac{(1+0+0)^{12} + (0+1)^3}{1-0} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{12} + (x + x^2)^3}{x^6 - x^3} = 2.$$

[Torna all'esercizio 1.4.2.23](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2})$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\sqrt{2\infty} - \sqrt{2\infty+2} = \infty - \infty.$$

Forma ottenuta: $\infty - \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Radicali. Metodo 3a: completamento della somma o differenza tra potenze.

$$\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2} = \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2})(\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2})}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}}$$

Differenza tra radicali. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato $\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}$.

$$\frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2})(\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2})}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}} = \frac{2x - (2x+2)}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}}$$

Prodotto. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{2x - (2x+2)}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}} = \frac{-2}{\sqrt{2x} + \sqrt{2x+2}}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{-2}{\sqrt{2\infty} + \sqrt{2\infty+2}} = \frac{-2}{\infty + \infty} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{2x+2}) = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.1](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} + x)$$

Sostituzione $x = -\infty$.

$$\sqrt{(-\infty)^2 - 2} + (-\infty) = \infty - \infty.$$

Forma ottenuta: $\infty - \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Radicali. Metodo 3a: completamento della somma o differenza tra potenze.

$$\sqrt{x^2 - 2} + x = \frac{(\sqrt{x^2 - 2} + x)(\sqrt{x^2 - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - 2} - x}$$

Somma tra radicale e potenza. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato $\sqrt{x^2 - 2} - x$.

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 2} + x)(\sqrt{x^2 - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - 2} - x} = \frac{(x^2 - 2) - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} - x}$$

Prodotto. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{(x^2 - 2) - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} - x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} - x}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

Sostituzione $x = -\infty$.

$$\frac{-2}{\sqrt{(-\infty)^2 - 2} - (-\infty)} = \frac{-2}{\infty + \infty} = 0.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} + x) = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.3](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Sostituzione $x = 1$.

$$\frac{\sqrt{1+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{1+3} - 2} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

Metodo. Radicali. Metodo 3a: completamento della somma o differenza tra potenze.

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - 2} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Numeratore. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato $\sqrt{x+2} + \sqrt{3}$.

$$\frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{3})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{(x+2) - 3}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Prodotto del numeratore. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{(x+2) - 3}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{x-1}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

$$\frac{x-1}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Denominatore. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato $\sqrt{x+3} + 2$.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{((x+3) - 4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Prodotto del denominatore. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{((x+3) - 4)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})}$$

Denominatore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $x-1$.

Sostituzione $x = 1$.

$$\frac{\sqrt{1+3} + 2}{\sqrt{1+2} + \sqrt{3}} = \frac{2+2}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} - 2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.5](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{0^2 + 4} - 2}{\sqrt{0^2 + 1} - 1} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

Metodo. Radicali. Metodo 3a: completamento della somma o differenza tra potenze.

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Numeratore. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato $\sqrt{x^2 + 4} + 2$.

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{(x^2 + 4) - 4}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Prodotto del numeratore. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{(x^2 + 4) - 4}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

$$\frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Denominatore. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato.

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{((x^2 + 1) - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Prodotto del denominatore. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{((x^2 + 1) - 1)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

Denominatore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della sottrazione.

$$\frac{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}$$

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per x^2 .

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{0^2 + 1} + 1}{\sqrt{0^2 + 4} + 2} = \frac{1 + 1}{2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.7](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sqrt{1+2 \cdot 0} - e^0}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

Metodo. Radicali. Metodo 3b: sviluppo del radicale o della potenza.

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

Radicale. Proprietà delle potenze: scrittura con esponente $\frac{1}{2}$.

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Potenza. Sviluppo di Taylor centrato in 0 fino al secondo ordine.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Esponenziale. Sviluppo di Taylor centrato in 0 fino al secondo ordine.

$$\frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} = \frac{\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2}$$

Numeratore. Sostituzione degli sviluppi di Taylor ottenuti.

$$\frac{\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: eliminazione dei termini opposti e raccolta dei termini di ordine x^2 .

$$\frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1 + \frac{o(x^2)}{x^2}$$

Frazione. Proprietà distributiva della divisione: divisione della somma.

Primo termine. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

Simbolo di Landau. Definizione di $o(x^2)$.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - e^x}{x^2} = -1 + 0 = -1.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.9](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.11

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{\ln(1+x)}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{(1+0)^{\frac{5}{3}} - 1}{\ln(1+0)} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

Metodo. Radicali. Metodo 3b: sviluppo del radicale o della potenza.

$$\frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{\ln(1+x)} = \frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}$$

Frazione. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: moltiplicazione e divisione per x .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{x} \right)$$

Limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} \right)$$

Limite notevole reciproco del logaritmo.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1}{x} \right) \cdot \left(\frac{x}{\ln(1+x)} \right) = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.11](#)

Soluzione esercizio 1.6.3.13

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{4 - 2x^4} - 2 \cos(x^2)}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0^4}{\sqrt{4 - 2 \cdot 0^4} - 2 \cos(0^2)} = \frac{0}{2 - 2} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

Metodo. Radicali. Metodo 3a: completamento della somma o differenza tra potenze.

$$\frac{x^4}{\sqrt{4 - 2x^4} - 2 \cos(x^2)} = \frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{\left(\sqrt{4 - 2x^4} - 2 \cos(x^2) \right) \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}$$

Denominatore. Proprietà dell'elemento neutro della moltiplicazione: uso del coniugato.

$$\frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{\left(\sqrt{4 - 2x^4} - 2 \cos(x^2) \right) \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)} = \frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{(4 - 2x^4) - 4 \cos^2(x^2)}$$

Prodotto del denominatore. Formula della differenza di quadrati: applicazione di $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{(4 - 2x^4) - 4 \cos^2(x^2)} = \frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{4(1 - \cos^2(x^2)) - 2x^4}$$

Denominatore. Proprietà distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore 4 nei primi due termini.

$$\frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{4(1 - \cos^2(x^2)) - 2x^4} = \frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{4 \sin^2(x^2) - 2x^4}$$

Denominatore. Funzioni trigonometriche: applicazione dell'identita' $1 - \cos^2 u = \sin^2 u$.

$$\frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{4 \sin^2(x^2) - 2x^4} = \frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{x^4 \left(4 \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} - 2 \right)}$$

Denominatore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^4 .

$$\frac{x^4 \left(\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2) \right)}{x^4 \left(4 \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} - 2 \right)} = \frac{\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2)}{4 \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} - 2}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x^4 .

$$\frac{\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2)}{4 \frac{\sin^2(x^2)}{x^4} - 2} = \frac{\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2)}{4 \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)^2 - 2}$$

Denominatore. Proprieta' distributiva della potenza sulla divisione: riscrittura del quadrato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)$$

Limite notevole.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sqrt{4 - 2x^4} - 2 \cos(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - 2x^4} + 2 \cos(x^2)}{4 \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)^2 - 2} = \frac{\sqrt{4 - 2 \cdot 0^4} + 2 \cos(0^2)}{4 \cdot 1^2 - 2} = 2.$$

[Torna all'esercizio 1.6.3.13](#)

Soluzione esercizio 1.7.1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + x^2) - \ln x}{x}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\ln(0^+ + (0^+)^2) - \ln(0^+)}{0^+} = \frac{\ln(0^+) - \ln(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty - (-\infty)}{0^+}.$$

Forma ottenuta: $\frac{-\infty - (-\infty)}{0^+}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Logaritmi.

$$\frac{\ln(x + x^2) - \ln x}{x} = \frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{x}\right)}{x}$$

Numeratore. Proprieta' del logaritmo della divisione: riunione dei due logaritmi.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\ln\left(\frac{0^+ + (0^+)^2}{0^+}\right)}{0^+} = \frac{\ln\left(\frac{0^+}{0^+}\right)}{0^+}.$$

Forma ottenuta nell'argomento del logaritmo: $\frac{0^+}{0^+}$, forma indeterminata.

Classificazione. Argomento del logaritmo. Frazione tra funzioni algebriche.

$$\frac{x + x^2}{x} = \frac{x(1 + x)}{x}$$

Numeratore dell'argomento del logaritmo. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x(1 + x)}{x} = 1 + x$$

Argomento del logaritmo. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per x .

$$\frac{\ln\left(\frac{x+x^2}{x}\right)}{x} = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

Argomento del logaritmo. Sostituzione del risultato ottenuto.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\ln(1 + 0^+)}{0^+} = \frac{\ln 1}{0^+} = \frac{0}{0^+}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x} \right)$$

Limite notevole.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + x^2) - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x} \right) = 1.$$

[Torna all'esercizio 1.7.1.1](#)

Soluzione esercizio 1.7.1.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

Sostituzione $n = \infty$.

$$\infty \ln \sqrt{\frac{\infty+1}{\infty}} = \infty \ln \sqrt{\frac{\infty}{\infty}}$$

Forma ottenuta nell'argomento del logaritmo: $\frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminata.

Classificazione. Argomento del logaritmo. Frazione tra funzioni algebriche.

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore n .

$$\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Frazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per n .

$$n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}} = n \ln \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Argomento del logaritmo. Sostituzione del risultato ottenuto.

$$n \ln \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Argomento del logaritmo. Proprieta' delle radici: $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$.

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = n \cdot \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Logaritmo. Proprieta' del logaritmo di una potenza: $\ln \left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln A$.

$$n \cdot \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Prodotto. Proprieta' commutativa del prodotto: scambio dei fattori.

Sostituzione $n = \infty$.

$$\frac{1}{2} \infty \ln \left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{2} \infty \ln(1 + 0) = \frac{1}{2} \infty \ln 1 = \frac{1}{2} \infty \cdot 0.$$

Forma ottenuta: $\infty \cdot 0$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{1}{2} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Prodotto. Definizione di divisione: $n = \frac{1}{\frac{1}{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right)$$

Limite notevole.

Risultato.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.7.1.3](#)

Soluzione esercizio 1.7.1.5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(2+x) - x \ln 2}{\sin^2 x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0 \cdot \ln(2+0) - 0 \cdot \ln 2}{\sin^2 0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{x \ln(2+x) - x \ln 2}{\sin^2 x} = \frac{x (\ln(2+x) - \ln 2)}{\sin^2 x}$$

Numeratore. Proprieta' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x .

$$\frac{x (\ln(2+x) - \ln 2)}{\sin^2 x} = \frac{x \ln \left(\frac{2+x}{2}\right)}{\sin^2 x}$$

Logaritmi del numeratore. Proprieta' del logaritmo della divisione: $\ln(2+x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{2+x}{2}\right)$.

$$\frac{x \ln\left(\frac{2+x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \frac{x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}$$

Argomento del logaritmo. Proprieta' invariante della divisione: divisione per 2.

$$\frac{x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

Frazione. Definizione di divisione: scrittura come prodotto di due fattori.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0}{\sin 0} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{0}{2}\right)}{\sin 0} = \frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Primo fattore. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

Limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin x}$$

Primo fattore. Limite notevole: evidenziazione del blocco standard.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{0}{2}\right)}{\sin 0} = \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2 \sin x}$$

Frazione. Proprieta' dell'elemento neutro della moltiplicazione: moltiplicazione e divisione per $\frac{x}{2}$.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{0}{2}\right)}{\frac{0}{2}} \cdot \frac{0}{2 \sin 0} = \frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Primo fattore. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)$$

Limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right) \cdot \frac{x}{2 \sin x}$$

Primo fattore. Limite notevole: evidenziazione del blocco standard.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{0}{2 \sin 0} = \frac{0}{0}$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)$$

Limite notevole.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(2+x) - x \ln 2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.7.1.5](#)

Soluzione esercizio 1.7.1.7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3) \right) x^3$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\left(\ln \infty - \frac{1}{3} \ln(\infty^3 + 3) \right) \infty^3 = (\infty - \infty) \cdot \infty.$$

Forma ottenuta: $(\infty - \infty) \cdot \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Parentesi. Logaritmi.

$$\left(\ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3) \right) x^3 = \left(\ln x - \ln(x^3 + 3)^{\frac{1}{3}} \right) x^3$$

Secondo termine della parentesi. Proprietà' del logaritmo di una potenza: $\frac{1}{3} \ln A = \ln A^{\frac{1}{3}}$.

$$\left(\ln x - \ln(x^3 + 3)^{\frac{1}{3}} \right) x^3 = \ln \left(\frac{x}{(x^3 + 3)^{\frac{1}{3}}} \right) x^3$$

Parentesi. Proprietà' del logaritmo della divisione: riunione dei due logaritmi.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\ln \left(\frac{\infty}{(\infty^3 + 3)^{\frac{1}{3}}} \right) \infty^3 = \ln \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \infty = \ln 1 \cdot \infty = 0 \cdot \infty.$$

Forma ottenuta: $0 \cdot \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Argomento del logaritmo. Frazione tra funzioni algebriche.

$$\frac{x}{(x^3 + 3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x}{\left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x^3} \right) \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Argomento del logaritmo. Denominatore. Proprietà' distributiva del prodotto: raccoglimento del fattore x^3 .

$$\frac{x}{\left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x^3} \right) \right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x}{(x^3)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Denominatore dell'argomento del logaritmo. Proprietà' distributiva della potenza sul prodotto: distribuzione dell'esponente $\frac{1}{3}$.

$$\frac{x}{(x^3)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x}{x \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Denominatore dell'argomento del logaritmo. Proprietà' delle potenze: $(x^3)^{\frac{1}{3}} = x$.

$$\frac{x}{x \left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Argomento del logaritmo. Proprietà' invariante della divisione: divisione per x .

$$\ln\left(\frac{x}{\left(x^3 + 3\right)^{\frac{1}{3}}}\right) x^3 = \ln\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) x^3$$

Argomento del logaritmo. Sostituzione del risultato ottenuto.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\ln\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{3}{\infty^3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) \infty^3 = \ln\left(\frac{1}{(1 + 0)^{\frac{1}{3}}}\right) \infty = \ln 1 \cdot \infty = 0 \cdot \infty.$$

Forma ottenuta: $0 \cdot \infty$, forma indeterminata.

Classificazione. Logaritmo.

$$\ln\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right) x^3 = \ln\left(\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right) x^3$$

Argomento del logaritmo. Proprietà' delle potenze: il reciproco di una potenza è la potenza con esponente opposto.

$$\ln\left(\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{3}}\right) x^3 = -\frac{1}{3} \ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right) x^3$$

Logaritmo. Proprietà' del logaritmo di una potenza: $\ln(A^\alpha) = \alpha \ln A$.

$$-\frac{1}{3} \ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right) x^3 = -\frac{1}{3} x^3 \ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)$$

Prodotto. Proprietà' commutativa del prodotto: scambio dei fattori.

Sostituzione $x = \infty$.

$$-\frac{1}{3} \infty^3 \ln\left(1 + \frac{3}{\infty^3}\right) = -\frac{1}{3} \infty \ln(1 + 0) = -\frac{1}{3} \infty \cdot 0.$$

Forma ottenuta: $\infty \cdot 0$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$-\frac{1}{3} x^3 \ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right) = -\frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)}{\frac{3}{x^3}}$$

Prodotto. Definizione di divisione: $\frac{x^3}{\frac{3}{x^3}} = \frac{1}{\frac{3}{x^3}}$.

Sostituzione $x = \infty$.

$$-\frac{\ln\left(1 + \frac{3}{\infty^3}\right)}{\frac{3}{\infty^3}} = -\frac{\ln(1 + 0)}{0} = -\frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x^3}\right)}{\frac{3}{x^3}} \right)$$

Limite notevole.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln x - \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3) \right) x^3 = - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)}{\frac{3}{x^3}} \right) = -1.$$

[Torna all'esercizio 1.7.1.7](#)

Soluzione esercizio 1.7.1.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x + x\right)}{x}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^0 + 0\right)}{0} = \frac{\ln(1 + 0)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x + x\right)}{x} = \frac{\ln(e^{-x} + x)}{x}$$

Potenza. Proprietà' delle potenze: $\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

$$\frac{\ln(e^{-x} + x)}{x} = \frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{x}$$

Argomento del logaritmo. Proprietà' associativa della somma: riscrittura nella forma $1 + u(x)$.

$$\frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{x} = \frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{e^{-x} + x - 1} \cdot \frac{e^{-x} + x - 1}{x}$$

Frazione. Proprietà' dell'elemento neutro della moltiplicazione: moltiplicazione e divisione per $e^{-x} + x - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{e^{-x} + x - 1} \right)$$

Limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x + x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{e^{-x} + x - 1} \right) \cdot \frac{e^{-x} + x - 1}{x}$$

Primo fattore. Limite notevole: evidenziazione del blocco standard.

$$\frac{e^{-x} + x - 1}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} + \frac{x}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} + 1$$

Numeratore. Proprietà' associativa della somma: separazione dei termini.

Frazione. Proprietà' distributiva della divisione: divisione della somma.

$$\frac{e^{-x} - 1}{x} + 1 = -\frac{e^{-x} - 1}{-x} + 1$$

Primo termine. Proprietà invariante della divisione: moltiplicazione per -1 di numeratore e denominatore.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x} - 1}{-x} \right)$$

Limite notevole dell'esponenziale con variabile $-x$.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x + x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (e^{-x} + x - 1))}{e^{-x} + x - 1} \cdot \left(-\frac{e^{-x} - 1}{-x} + 1 \right) = 1 \cdot (-1 + 1) = -1 + 1 = 0.$$

[Torna all'esercizio 1.7.1.9](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{x^2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{x^2} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} - 1}{x^2}$$

Numeratore. Formula di addizione del seno: separazione della parte variabile x dalla costante $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} - 1}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Numeratore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\cos 0 - 1}{0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: raccolta del segno meno.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

Limite notevole del coseno con variabile x .

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.1](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - \pi) + 1}{x^2}$$

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{\cos(0 - \pi) + 1}{0^2} = \frac{-1 + 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$\frac{\cos(x - \pi) + 1}{x^2} = \frac{\cos x \cos \pi + \sin x \sin \pi + 1}{x^2}$$

Numeratore. Formula di addizione del coseno: separazione della parte variabile x dalla costante π .

$$\frac{\cos x \cos \pi + \sin x \sin \pi + 1}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Numeratore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$.

Sostituzione $x = 0$.

$$\frac{1 - \cos 0}{0^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

Limite notevole del coseno con variabile x .

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x - \pi) + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.3](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.5

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}}$$

Sostituzione $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} - 1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Denominatore. Formula del quadrato di un binomio: fattorizzazione.

$$\frac{\sin x - 1}{x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}} = \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Denominatore. Sostituzione del risultato ottenuto.

$$\frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: riscrittura di x nella forma $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Numeratore. Formula di addizione del seno: separazione della parte variabile $x - \frac{\pi}{2}$ dalla costante $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Numeratore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Sostituzione $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos 0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: raccolta del segno meno.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Limite notevole del coseno con variabile $x - \frac{\pi}{2}$.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4}} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.5](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Il termine $\frac{1}{x}$ cambia segno per $x \rightarrow 0$. Si studiano i limiti laterali.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\sin(\arctan(\frac{1}{0^+})) - 1}{\sin(\arctan^2(0^+))} = \frac{\sin(\arctan(+\infty)) - 1}{\sin 0} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$\frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\sin((\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Numeratore. Proprieta' associativa della somma: riscrittura di $\arctan(\frac{1}{x})$ nella forma $(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin((\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} + \cos(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2} - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Numeratore. Formula di addizione del seno: separazione della parte variabile $\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}$ dalla costante $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} + \cos(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2} - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\cos(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Numeratore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$$\frac{\cos(\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{\pi}{2}) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\cos(-\arctan x) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\cos(\arctan x) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Argomento del coseno. Proprieta' dell'arcotangente per argomenti positivi: $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, con $t = x > 0$.

Coseno. Parita' del coseno: $\cos(-t) = \cos t$.

Sostituzione $x = 0^+$.

$$\frac{\cos(\arctan 0^+) - 1}{\sin(\arctan^2(0^+))} = \frac{\cos 0 - 1}{\sin 0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\frac{\cos(\arctan x) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = -\frac{1 - \cos(\arctan x)}{\arctan^2(x)} \cdot \frac{\arctan^2(x)}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Numeratore. Proprieta' associativa della somma: raccolta del segno meno.

Frazione. Proprieta' dell'elemento neutro della moltiplicazione: moltiplicazione e divisione per $\arctan^2(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos(\arctan x)}{\arctan^2(x)} \right)$$

Limite notevole del coseno con variabile $\arctan x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(\arctan^2(x))}{\arctan^2(x)} \right)$$

Limite notevole del seno con variabile $\arctan^2(x)$.

Risultato del limite destro.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{\arctan^2(x)}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\arctan^2(x))}{\arctan^2(x)}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))}$$

Sostituzione $x = 0^-$.

$$\frac{\sin(\arctan(\frac{1}{0^-})) - 1}{\sin(\arctan^2(0^-))} = \frac{\sin(\arctan(-\infty)) - 1}{\sin(0^+)} = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}) - 1}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty.$$

Risultato del limite sinistro.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = -\infty.$$

I due limiti laterali sono diversi.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctan(\frac{1}{x})) - 1}{\sin(\arctan^2(x))} = \#_{\text{ill}}.$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.7](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\arctan x)}$$

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sin(\frac{1}{\infty})}{\cos(\arctan \infty)} = \frac{\sin 0}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Denominatore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\arctan x)} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos((\arctan x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2})}$$

Denominatore. Proprietà associativa della somma: riscrittura di $\arctan x$ nella forma $(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos((\arctan x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2}}$$

Denominatore. Formula di addizione del coseno: separazione della parte variabile $\arctan x - \frac{\pi}{2}$ dalla costante $\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(\arctan x - \frac{\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{-\sin(\arctan x - \frac{\pi}{2})}$$

Denominatore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$$\frac{\sin(\frac{1}{x})}{-\sin(\arctan x - \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{-\sin(-\arctan(\frac{1}{x}))} = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sin(\arctan(\frac{1}{x}))}$$

Argomento del seno. Proprietà dell'arcotangente per argomenti positivi: $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, con $t = x > 0$.

Seno. Disparità del seno: $\sin(-t) = -\sin t$.

Sostituzione $x = \infty$.

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{\infty}\right)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\infty}\right)\right)} = \frac{\sin 0}{\sin(\arctan 0)} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Frazione tra funzioni analitiche.

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Denominatore. Definizione di tangente: $\sin t = \tan t \cos t$.

Argomento. Funzione inversa: $\tan(\arctan u) = u$.

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Denominatore. Sostituzione del risultato ottenuto.

Frazione. Definizione di divisione: prodotto per il reciproco.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right)$$

Limite notevole del seno con variabile $\frac{1}{x}$.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) \cdot \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = 1 \cdot \frac{1}{\cos(\arctan 0)} = 1.$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.9](#)

Soluzione esercizio 1.8.1.11

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Sostituzione $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0}.$$

Forma ottenuta: $\frac{0}{0}$, forma indeterminata.

Classificazione. Numeratore. Funzioni trigonometriche e iperboliche. Metodo 3d.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: riscrittura di x nella forma $\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} \right) - \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Formula di addizione del seno e del coseno: separazione della parte variabile $x - \frac{\pi}{3}$ dalla costante $\frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} \right)}{x - \frac{\pi}{3}} - \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right)}{x - \frac{\pi}{3}} - \frac{\frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Valori delle funzioni trigonometriche note: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right)}{x - \frac{\pi}{3}} - \frac{\frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Proprietà distributiva del prodotto: distribuzione del fattore $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: somma dei termini simili.

$$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Numeratore. Proprietà associativa della somma: esecuzione della somma $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

Limite notevole del seno con variabile $x - \frac{\pi}{3}$.

Risultato.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

[Torna all'esercizio 1.8.1.11](#)

2 Derivate

Le notazioni

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad f'(x), \quad D[f(x)]$$

sono equivalenti e indicano tutte la derivata della funzione f rispetto alla variabile x .

2.1 Derivate delle funzioni fondamentali

Le derivate fondamentali da imparare a memoria sono le seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}c &= 0, & \frac{d}{dx}x &= 1, & \frac{d}{dx}(x^\alpha) &= \alpha x^{\alpha-1}. \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x, & \frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{x}. \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x, & \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x. \\ \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}, & \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Le derivate precedenti, insieme alle regole di derivazione, permettono di ricavare tutte le altre formule usate normalmente in Analisi 1. Conviene quindi memorizzare solo queste e saper ricondurre le altre a esse.

Per comodità, si riportano anche alcune derivate già pronte. E' comunque opportuno saperle ricavare dalle formule fondamentali. Tutte le formule vanno lette nel dominio in cui le funzioni coinvolte sono definite e derivabili.

2.1.1 Esponenziali e logaritmi con base generica

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, allora

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Quindi

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a, \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

2.1.2 Funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{1}{\cos^2 x}, & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x, & \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x.\end{aligned}$$

2.1.3 Funzioni trigonometriche inverse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) &= -\frac{1}{1+x^2}. \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

2.1.4 Funzioni iperboliche

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x, & \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x. \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & \frac{d}{dx}(\operatorname{coth} x) &= -\frac{1}{\sinh^2 x}.\end{aligned}$$

2.1.5 Funzioni iperboliche inverse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & \frac{d}{dx}(\operatorname{arcosh} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{artanh} x) &= \frac{1}{1-x^2}, & \frac{d}{dx}(\operatorname{arcoth} x) &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

2.1.6 Formule utili

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|} \quad \text{per } x \neq 0.$$

In $x = 0$, la funzione $x \mapsto |x|$ non è derivabile.

2.2 Regole di derivazione

2.2.1 Combinazioni lineari

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx}.$$

In particolare,

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(f - g) = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(\alpha f) = \alpha \frac{df}{dx}.$$

2.2.2 Moltiplicazioni e divisioni

Si moltiplicano tutte le funzioni insieme e, in ogni addendo, se ne deriva una sola per volta. Se la funzione derivata sta al numeratore, l'addendo ha segno $+$. Se la funzione derivata sta al denominatore, l'addendo ha segno $-$. Il denominatore finale è il quadrato del denominatore dell'espressione iniziale.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f_1 f_2 \cdots f_m}{g_1 g_2 \cdots g_n} \right) = \frac{(f_1' f_2 \cdots f_m + f_1 f_2' \cdots f_m + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_m') (g_1 g_2 \cdots g_n) - (f_1 f_2 \cdots f_m) (g_1' g_2 \cdots g_n + g_1 g_2' \cdots g_n + \cdots + g_1 g_2 \cdots g_n')}{(g_1 g_2 \cdots g_n)^2}.$$

Il prodotto è il caso particolare in cui il denominatore dell'espressione iniziale è 1.

Esempio:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 \ln x}{e^x \sin x} \right) = \frac{(2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}) e^x \sin x - x^2 \ln x (e^x \sin x + e^x \cos x)}{(e^x \sin x)^2}.$$

2.2.3 Funzioni composte

Se $y = F(u(x))$, allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{du}(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

Operativamente:

1. si deriva la funzione esterna;
2. si lascia invariato l'argomento interno;
3. si moltiplica per la derivata dell'argomento interno.

2.2.4 Funzioni inverse

Se f è invertibile e

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=f^{-1}(x)} \neq 0,$$

allora

$$\frac{d}{dx} (f^{-1}(x)) = \frac{1}{\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=f^{-1}(x)}}.$$

Equivalentemente, se

$$y = f^{-1}(x), \quad x = f(y),$$

allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

2.2.5 Funzioni definite tramite integrale

Se

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Se anche gli estremi dipendono da x , allora

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$$

implica

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(\beta(x)) \frac{d\beta}{dx} - f(\alpha(x)) \frac{d\alpha}{dx}.$$

Se anche l'integrando dipende da x , allora

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(x, t) dt$$

implica

$$\frac{d}{dx} F(x) = h(x, \beta(x)) \frac{d\beta}{dx} - h(x, \alpha(x)) \frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt.$$

2.3 Algoritmo generale

1. Determinare il dominio della funzione.
2. Se compaiono modulo, segno, massimo, minimo o definizioni analoghe, riscrivere la funzione come funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in I_1, \\ f_2(x) & x \in I_2, \\ \vdots & \\ f_n(x) & x \in I_n. \end{cases}$$

3. Se compare un termine in cui la variabile sta sia alla base sia all'esponente, riscriverlo nella forma

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))},$$

dove $u(x) > 0$.

4. Per ogni tratto e per ogni blocco, individuare l'operazione esterna principale. derivarla usando la regola corrispondente.
 - (a) combinazioni lineari tra funzioni
 - (b) moltiplicazioni e divisioni
 - (c) funzioni composte
 - (d) funzioni inverse
 - (e) funzioni definite tramite integrale
5. Ripetere il procedimento sui sotto-termini derivati finché non restano più simboli di derivata da calcolare.

6. Assemblare i risultati ottenuti. Se la funzione iniziale e' definita a tratti, anche la derivata va scritta a tratti sugli interni degli intervalli:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}f_1(x) & x \in \overset{\circ}{I}_1, \\ \frac{d}{dx}f_2(x) & x \in \overset{\circ}{I}_2, \\ \vdots & \\ \frac{d}{dx}f_n(x) & x \in \overset{\circ}{I}_n. \end{cases}$$

7. Studiare separatamente i punti di raccordo. In ciascun punto a , controllare prima la continuita'. Se la funzione non e' continua in a , la derivata non esiste in a . Se la funzione e' continua in a , confrontare la derivata sinistra e la derivata destra:

$$\frac{df}{dx}(a^-), \quad \frac{df}{dx}(a^+).$$

Se coincidono, la derivata esiste anche in a . Se non coincidono, la derivata non esiste in a .

Nei paragrafi seguenti i singoli passaggi dell'algoritmo verranno isolati e allenati separatamente.

2.4 Derivate con potenze al denominatore

Quando si deriva una frazione il cui denominatore è una potenza, dopo aver applicato la regola di derivazione, è sempre possibile eseguire un raccoglimento a factor comune e una semplificazione. si eseguano le seguenti derivate e si fattorizzino le espressioni il più possibile.

1.

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.1](#)

2.

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x}{(x+2)^3}$$

3.

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\ln^2(x)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.3](#)

4.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{\cos^2(x)}$$

5.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2+2}{e^{3x}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.5](#)

6.

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2+4x+4)^2}$$

7.

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^4}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.7](#)

8.

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x}{(x+2)^4}$$

9.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{\ln^4(x)}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.9](#)

10.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 1}{\cos^4(x)}$$

2.5 Derivate di prodotti o frazioni con radici

Quando si deriva un prodotto o una frazione di cui almeno uno dei fattori è una radice, si avrà sicuramente almeno un termine con la radice stessa e un termine con la radice diminuita di un grado. In questo caso, il modo più semplice di procedere è raccogliere a fattor comune la radice con l'esponente minore. Se quest'ultimo è negativo, sarà opportuno cambiarlo di segno e mettere la radice al denominatore.

Derivare le seguenti funzioni e fattorizzare l'espressione ottenuta:

1.

$$\frac{d}{dx} e^x \sqrt{x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.1](#)

2.

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

3.

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.3](#)

4.

$$\frac{d}{dx} 2x\sqrt{x+2}$$

5.

$$\frac{d}{dx} e^x \sqrt{2x+1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.5](#)

6.

$$\frac{d}{dx} x e^x \sqrt{2x+1}$$

7.

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.7](#)

8.

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

9.

$$\frac{d}{dx} 2x^3 \sqrt{x^2 + x + 2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.9](#)

10.

$$\frac{d}{dx} 2e^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2}$$

11.

$$\frac{d}{dx} 2xe^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.11

12.

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2}}{x^3}$$

13.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 2.5.13

14.

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 e^{2x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

2.6 Soluzioni

Soluzione esercizio 2.4.1

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{d}{dx}(x)(x+1)^2 - x \frac{d}{dx}((x+1)^2)}{((x+1)^2)^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(x)(x+1)^2 - x \frac{d}{dx}((x+1)^2)}{((x+1)^2)^2} = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Primo termine del numeratore. Derivata fondamentale: derivata di x .

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $((x+1)^2)^2 = (x+1)^4$.

$$\frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)((x+1) - 2x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(1-x)}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore $x+1$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione di $(x+1) - 2x$.

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $x+1$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{(x+1)^3}}, \quad x \neq -1.$$

Soluzione esercizio 2.4.3

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\ln^2(x)} = \frac{\frac{d}{dx}(x) \ln^2(x) - x \frac{d}{dx}(\ln^2(x))}{(\ln^2(x))^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(x) \ln^2(x) - x \frac{d}{dx}(\ln^2(x))}{(\ln^2(x))^2} = \frac{\ln^2(x) - 2 \ln(x)}{\ln^4(x)}.$$

Primo termine del numeratore. Derivata fondamentale: derivata di x .

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $(\ln^2(x))^2 = \ln^4(x)$.

$$\frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)}{\ln^4(x)} = \frac{\ln(x)(\ln(x) - 2)}{\ln^4(x)} = \frac{\ln(x) - 2}{\ln^3(x)}.$$

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore $\ln(x)$.
 Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $\ln(x)$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 2}{\ln^3(x)}}, \quad x > 0, x \neq 1.$$

Soluzione esercizio 2.4.5

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 2}{e^{3x}} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2)e^{3x} - (x^2 + 2)\frac{d}{dx}(e^{3x})}{(e^{3x})^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2)e^{3x} - (x^2 + 2)\frac{d}{dx}(e^{3x})}{(e^{3x})^2} = \frac{2xe^{3x} - 3(x^2 + 2)e^{3x}}{e^{6x}}.$$

Primo termine del numeratore. Regola di derivazione della somma.

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $(e^{3x})^2 = e^{6x}$.

$$\frac{2xe^{3x} - 3(x^2 + 2)e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(2x - 3(x^2 + 2))}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(2x - 3x^2 - 6)}{e^{6x}} = \frac{2x - 3x^2 - 6}{e^{3x}}.$$

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore e^{3x} .

Parentesi. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: svolgimento di $-3(x^2 + 2)$.

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per e^{3x} .

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x^2 + 2}{e^{3x}} = \frac{2x - 3x^2 - 6}{e^{3x}}}.$$

Soluzione esercizio 2.4.7

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^4} = \frac{\frac{d}{dx}(x)(x+1)^4 - x\frac{d}{dx}((x+1)^4)}{((x+1)^4)^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(x)(x+1)^4 - x\frac{d}{dx}((x+1)^4)}{((x+1)^4)^2} = \frac{(x+1)^4 - 4x(x+1)^3}{(x+1)^8}.$$

Primo termine del numeratore. Derivata fondamentale: derivata di x .

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $((x+1)^4)^2 = (x+1)^8$.

$$\frac{(x+1)^4 - 4x(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{(x+1)^3((x+1) - 4x)}{(x+1)^8} = \frac{(x+1)^3(1 - 3x)}{(x+1)^8} = \frac{1 - 3x}{(x+1)^5}.$$

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore $x+1$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione di $(x+1) - 4x$.

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $(x+1)^3$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x}{(x+1)^4} = \frac{1 - 3x}{(x+1)^5}}, \quad x \neq -1.$$

Soluzione esercizio 2.4.9

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{\ln^4(x)} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2) \ln^4(x) - x^2 \frac{d}{dx}(\ln^4(x))}{(\ln^4(x))^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^2) \ln^4(x) - x^2 \frac{d}{dx}(\ln^4(x))}{(\ln^4(x))^2} = \frac{2x \ln^4(x) - 4x \ln^3(x)}{\ln^8(x)}.$$

Primo termine del numeratore. Regola della potenza.

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $(\ln^4(x))^2 = \ln^8(x)$.

$$\frac{2x \ln^4(x) - 4x \ln^3(x)}{\ln^8(x)} = \frac{2x \ln^3(x) (\ln(x) - 2)}{\ln^8(x)} = \frac{2x (\ln(x) - 2)}{\ln^5(x)}.$$

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore $2x \ln^3(x)$.

Frazione. Proprietà invariantiva della divisione: divisione per $\ln^3(x)$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x^2}{\ln^4(x)} = \frac{2x (\ln(x) - 2)}{\ln^5(x)}}, \quad x > 0, x \neq 1.$$

Soluzione esercizio 2.5.1

$$\frac{d}{dx} e^x \sqrt{x} = \frac{d}{dx}(e^x) \sqrt{x} + e^x \frac{d}{dx}(\sqrt{x}).$$

Prodotto. Regola di derivazione del prodotto.

$$\frac{d}{dx}(e^x) \sqrt{x} + e^x \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}}.$$

Primo termine. Derivata fondamentale: derivata di e^x .

Secondo termine. Regola della potenza.

$$e^x \sqrt{x} + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{2xe^x + e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x + 1)}{2\sqrt{x}}.$$

Somma. Proprietà delle frazioni: riduzione al denominatore comune $2\sqrt{x}$.

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore e^x .

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x \sqrt{x} = \frac{e^x(2x + 1)}{2\sqrt{x}}}, \quad x > 0.$$

Soluzione esercizio 2.5.3

$$\frac{d}{dx} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{d}{dx}(e^x) \sqrt{x} - e^x \frac{d}{dx}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx}(e^x) \sqrt{x} - e^x \frac{d}{dx}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} = \frac{e^x \sqrt{x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}}}{x}.$$

Primo termine del numeratore. Derivata fondamentale: derivata di e^x .

Secondo termine del numeratore. Regola della potenza.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $(\sqrt{x})^2 = x$.

$$\frac{e^x \sqrt{x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2xe^x - e^x}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}.$$

Numeratore. Proprietà' delle frazioni: riduzione al denominatore comune $2\sqrt{x}$.

Numeratore finale. Proprietà' distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore e^x .

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}}, \quad x > 0.$$

Soluzione esercizio 2.5.5

$$\frac{d}{dx} e^x \sqrt{2x+1} = \frac{d}{dx} (e^x) \sqrt{2x+1} + e^x \frac{d}{dx} (\sqrt{2x+1}).$$

Prodotto. Regola di derivazione del prodotto.

$$\frac{d}{dx} (e^x) \sqrt{2x+1} + e^x \frac{d}{dx} (\sqrt{2x+1}) = e^x \sqrt{2x+1} + \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}}.$$

Primo termine. Derivata fondamentale: derivata di e^x .

Secondo termine. Regola della catena.

$$e^x \sqrt{2x+1} + \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{e^x(2x+1) + e^x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2e^x(x+1)}{\sqrt{2x+1}}.$$

Somma. Proprietà' delle frazioni: riduzione al denominatore comune $\sqrt{2x+1}$.

Numeratore. Proprietà' distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore e^x .

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione di $(2x+1) + 1$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x \sqrt{2x+1} = \frac{2e^x(x+1)}{\sqrt{2x+1}}}, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

Soluzione esercizio 2.5.7

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2x+1}}{x} = \frac{\frac{d}{dx} (\sqrt{2x+1}) x - \sqrt{2x+1} \frac{d}{dx} (x)}{x^2}.$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx} (\sqrt{2x+1}) x - \sqrt{2x+1} \frac{d}{dx} (x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{2x+1}}{x^2}.$$

Primo termine del numeratore. Regola della catena.

Secondo termine del numeratore. Derivata fondamentale: derivata di x .

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{2x+1}}{x^2} = \frac{x - (2x+1)}{x^2 \sqrt{2x+1}} = -\frac{x+1}{x^2 \sqrt{2x+1}}.$$

Numeratore. Proprietà' delle frazioni: riduzione al denominatore comune $\sqrt{2x+1}$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione di $x - (2x+1)$.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{2x+1}}{x} = -\frac{x+1}{x^2 \sqrt{2x+1}}}, \quad x > -\frac{1}{2}, x \neq 0.$$

Soluzione esercizio 2.5.9

$$\frac{d}{dx} 2x^3 \sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{d}{dx} (2x^3) \sqrt{x^2 + x + 2} + 2x^3 \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x + 2}).$$

Prodotto. Regola di derivazione del prodotto.

$$\frac{d}{dx} (2x^3) \sqrt{x^2 + x + 2} + 2x^3 \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x + 2}) = 6x^2 \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{x^3(2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Primo termine. Regola della potenza.

Secondo termine. Regola della catena.

$$6x^2 \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{x^3(2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{6x^2(x^2 + x + 2) + x^3(2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x^2(6(x^2 + x + 2) + x(2x + 1))}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Somma. Proprieta' delle frazioni: riduzione al denominatore comune $\sqrt{x^2 + x + 2}$.

Numeratore. Proprieta' distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore x^2 .

$$\frac{x^2(6(x^2 + x + 2) + x(2x + 1))}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x^2(8x^2 + 7x + 12)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Parentesi. Proprieta' distributiva della moltiplicazione sulla somma: svolgimento di $6(x^2 + x + 2)$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione finale.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} 2x^3 \sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{x^2(8x^2 + 7x + 12)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}}.$$

Soluzione esercizio 2.5.11

$$\frac{d}{dx} (2xe^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2}) = 2e^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2} + 6x^3 e^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{x(2x + 1)e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Prodotto. Regola di derivazione del prodotto.

$$2e^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2} + 6x^3 e^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{x(2x + 1)e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{2e^{x^3}(x^2 + x + 2) + 6x^3 e^{x^3}(x^2 + x + 2) + x(2x + 1)e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Primo termine. Derivata fondamentale: derivata di $2x$.

Secondo termine. Regola della catena.

Terzo termine. Regola della catena.

Somma. Proprieta' delle frazioni: riduzione al denominatore comune $\sqrt{x^2 + x + 2}$.

$$\frac{2e^{x^3}(x^2 + x + 2) + 6x^3 e^{x^3}(x^2 + x + 2) + x(2x + 1)e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}} (2(x^2 + x + 2) + 6x^3(x^2 + x + 2) + x(2x + 1)).$$

Numeratore. Proprieta' distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore e^{x^3} .

$$\frac{e^{x^3}}{\sqrt{x^2 + x + 2}} (2(x^2 + x + 2) + 6x^3(x^2 + x + 2) + x(2x + 1)) = \frac{e^{x^3} (6x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 3x + 4)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}.$$

Parentesi. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: svolgimento di $2(x^2 + x + 2)$ e $6x^3(x^2 + x + 2)$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione finale.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(2xe^{x^3} \sqrt{x^2 + x + 2} \right) = \frac{e^{x^3} (6x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 3x + 4)}{\sqrt{x^2 + x + 2}}}$$

Soluzione esercizio 2.5.13

$$\frac{d}{dx} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{\frac{d}{dx} (x^3) \sqrt{x^2 + x + 2} - x^3 \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x + 2})}{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2}$$

Frazione. Regola di derivazione della divisione.

$$\frac{\frac{d}{dx} (x^3) \sqrt{x^2 + x + 2} - x^3 \frac{d}{dx} (\sqrt{x^2 + x + 2})}{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2} = \frac{3x^2 \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{x^3(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}}{x^2 + x + 2}$$

Primo termine del numeratore. Regola della potenza.

Secondo termine del numeratore. Regola della catena.

Denominatore. Proprietà delle potenze: $(\sqrt{x^2 + x + 2})^2 = x^2 + x + 2$.

$$\frac{3x^2 \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{x^3(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}}{x^2 + x + 2} = \frac{6x^2(x^2 + x + 2) - x^3(2x + 1)}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x^2(6(x^2 + x + 2) - x(2x + 1))}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

Numeratore. Proprietà delle frazioni: riduzione al denominatore comune $2\sqrt{x^2 + x + 2}$.

Numeratore. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: raccoglimento del fattore x^2 .

$$\frac{x^2(6(x^2 + x + 2) - x(2x + 1))}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x^2(4x^2 + 5x + 12)}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}}$$

Parentesi. Proprietà distributiva della moltiplicazione sulla somma: svolgimento di $6(x^2 + x + 2)$.

Parentesi. Somma di termini simili: riduzione finale.

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x^2(4x^2 + 5x + 12)}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}}}$$

3 Funzioni continue

Studia il segno delle seguenti funzioni:

1.

$$\ln(x^2 + 1)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 1](#)

2.

$$\arctan(x^2)$$

3.

$$\ln(x^2 + 1) + \arctan(x^2)$$

4.

$$\arctan(1 - x)$$

5.

$$\ln(x) - \arctan(1 - x)$$

6.

$$\sin(1 - x^2)$$

Con $x \in (-1; 1)$

7.

$$\cos(x)$$

Con $x \in (-1; 1)$

8.

$$\sin(1 - x^2) + \cos(x)$$

Con $x \in (-1; 1)$

9.

$$x \ln(x^2 + 1) + \arctan(x)$$

10.

$$\ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) + \arctan(x - 1)$$

11.

$$\ln(x)(x - 2)(x - 3)$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 11](#)

12.

$$\frac{\ln(x)(x - 2)(x - 3)}{(x - 4)^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 12](#)

13.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 13](#)

14.

$$\frac{(x - 10)^5}{(\ln(x))^2}$$

[Vai alla soluzione dell'esercizio 14](#)

Trova il numero di soluzioni delle seguenti equazioni:

1.

$$x - 3 = \ln(x)$$

2.

$$x^2 - 5 = \ln(x)$$

3.

$$x + 2 = e^x$$

4.

$$x + 1 = e^x$$

5.

$$x - 1 = 3 \cdot \arctan(x)$$

6.

$$\arctan(x) = \ln(x)$$

3.1 Soluzioni

Soluzione esercizio 11

$$\text{Dom}(\ln(x)(x-2)(x-3)) = (0, +\infty).$$

Logaritmo. Condizioni del logaritmo.

Studio del fattore $\ln(x)$.

$$\ln(x) = 0 \iff e^{\ln(x)} = e^0.$$

Equazione. Applicazione della funzione $t \mapsto e^t$ ai due membri.

$$e^{\ln(x)} = e^0 \iff x = 1.$$

Primo membro. Proprietà inversa tra logaritmo ed esponenziale.

Secondo membro. Sostituzione $e^0 = 1$.

Studio del fattore $x - 2$.

$$x - 2 > 0 \iff (x - 2) + 2 > 0 + 2.$$

Disequazione. Applicazione della funzione monotona crescente $t \mapsto t + 2$ ai due membri.

$$(x - 2) + 2 > 0 + 2 \iff x > 2.$$

Primo membro. Sostituzione $(x - 2) + 2 = x$.

Secondo membro. Sostituzione $0 + 2 = 2$.

Studio del fattore $x - 3$.

$$x - 3 > 0 \iff (x - 3) + 3 > 0 + 3.$$

Disequazione. Applicazione della funzione monotona crescente $t \mapsto t + 3$ ai due membri.

$$(x - 3) + 3 > 0 + 3 \iff x > 3.$$

Primo membro. Sostituzione $(x - 3) + 3 = x$.

Secondo membro. Sostituzione $0 + 3 = 3$.

x	0	1	2	3	$+\infty$
$\ln(x)$	$x -$	0 +	+ +	+ +	+ +
$x - 2$	$x -$	- -	0 +	+ +	+ +
$x - 3$	$x -$	- -	- -	0 +	+ +
$\ln(x)(x-2)(x-3)$	$x -$	0 +	0 -	0 +	+ +

Ultima riga. Sostituzione dei segni dei tre fattori nel prodotto.

$$\begin{cases} \ln(x)(x-2)(x-3) > 0 & \text{se } x \in (1, 2) \cup (3, +\infty), \\ \ln(x)(x-2)(x-3) = 0 & \text{se } x \in \{1, 2, 3\}, \\ \ln(x)(x-2)(x-3) < 0 & \text{se } x \in (0, 1) \cup (2, 3). \end{cases}$$

Risultato.

[Torna all'esercizio 11](#)

Soluzione esercizio 13

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Poiche' il coefficiente di x^2 e' positivo, $x^2 + x + 1$ e' sempre positivo su \mathbb{R} . Quindi

$$\text{Dom} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} \right) = \mathbb{R}.$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2 + x + 1}.$$

Numeratore. Sostituzione $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Studio del fattore $x + 1$.

$$x + 1 > 0 \iff (x + 1) - 1 > 0 - 1.$$

Disequazione. Applicazione della funzione monotona crescente $t \mapsto t - 1$ ai due membri.

$$(x + 1) - 1 > 0 - 1 \iff x > -1.$$

Primo membro. Sostituzione $(x + 1) - 1 = x$.

Secondo membro. Sostituzione $0 - 1 = -1$.

Studio del fattore $x - 1$.

$$x - 1 > 0 \iff (x - 1) + 1 > 0 + 1.$$

Disequazione. Applicazione della funzione monotona crescente $t \mapsto t + 1$ ai due membri.

$$(x - 1) + 1 > 0 + 1 \iff x > 1.$$

Primo membro. Sostituzione $(x - 1) + 1 = x$.

Secondo membro. Sostituzione $0 + 1 = 1$.

Studio del fattore $x^2 + x + 1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Poiche' il coefficiente di x^2 e' positivo, $x^2 + x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x + 1$	-	-	0	+
$x - 1$	-	-	-	0
$x^2 + x + 1$	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$	+	+	0	-

Ultima riga. Sostituzione dei segni dei fattori nel quoziente.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = 0 & \text{se } x \in \{-1, 1\}, \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} < 0 & \text{se } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Risultato.

[Torna all'esercizio 13](#)

Soluzione esercizio 14

$$\text{Dom} \left(\frac{(x-10)^5}{(\ln(x))^2} \right) = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Logaritmo. Condizioni del logaritmo.

Denominatore. Sostituzione $(\ln(x))^2 \neq 0 \iff \ln(x) \neq 0 \iff x \neq 1$.

Studio del fattore $x - 10$.

$$x - 10 > 0 \iff (x - 10) + 10 > 0 + 10.$$

Disequazione. Applicazione della funzione monotona crescente $t \mapsto t + 10$ ai due membri.

$$(x - 10) + 10 > 0 + 10 \iff x > 10.$$

Primo membro. Sostituzione $(x - 10) + 10 = x$.

Secondo membro. Sostituzione $0 + 10 = 10$.

Studio del fattore $\ln(x)$.

$$\ln(x) = 0 \iff e^{\ln(x)} = e^0.$$

Equazione. Applicazione della funzione $t \mapsto e^t$ ai due membri.

$$e^{\ln(x)} = e^0 \iff x = 1.$$

Primo membro. Proprieta' inversa tra logaritmo ed esponenziale.

Secondo membro. Sostituzione $e^0 = 1$.

x	0	1	10	$+\infty$			
$x - 10$	x	-	-	0	+	+	
$\ln(x)$	x	+	x	+	+	+	
$\frac{(x-10)^5}{(\ln(x))^2}$	x	-	x	-	0	+	+

Ultima riga. Sostituzione $(x - 10)^5$ ha lo stesso segno di $x - 10$.

Ultima riga. Sostituzione $(\ln(x))^2 > 0$ per ogni $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$\begin{cases} \frac{(x-10)^5}{(\ln(x))^2} > 0 & \text{se } x \in (10, +\infty), \\ \frac{(x-10)^5}{(\ln(x))^2} = 0 & \text{se } x = 10, \\ \frac{(x-10)^5}{(\ln(x))^2} < 0 & \text{se } x \in (0, 1) \cup (1, 10). \end{cases}$$

Risultato.

[Torna all'esercizio 14](#)

4 Integrali

4.1 Integrali per parti

1.

$$\int x e^x dx$$

2.

$$\int x \ln(x) dx$$

3.

$$\int x \sin(x) dx$$

4.
$$\int \ln(x) dx$$
5.
$$\int (x+1) \cos(x) dx$$
6.
$$\int x^2 e^x dx$$
7.
$$\int x \ln^2(x) dx$$
8.
$$\int (x^2+1) \sin(x) dx$$
9.
$$\int \ln^2(x) dx$$
10.
$$\int (x+1)^2 \cos(x) dx$$

4.2 Integrali di frazioni tra polinomi

Consideriamo un integrale della forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

Dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi.

Per calcolare questo tipo di integrali, seguiamo due fasi principali:

1. Scomposizione della frazione in fratti semplici;
2. Integrazione dei singoli fratti ottenuti.

4.2.1 Parte I: Scomposizione in fratti semplici

Step 1. Ci assicuriamo che il grado del polinomio al numeratore sia minore del grado del polinomio al denominatore. Se non è così, eseguiamo la divisione tra polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

Dove $S(x)$ è un polinomio e $\frac{R(x)}{Q(x)}$ è una frazione in cui il polinomio al numeratore ha grado minore del polinomio al denominatore. L'integrale si separa allora in

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Step 2. Fattorizziamo il polinomio al denominatore. Ogni polinomio si può scomporre in fattori di primo grado (cioè lineari) e in polinomi di secondo grado che non si possono più fattorizzare perché hanno il discriminante negativo.

Step 3. Scriviamo la frazione come somma di più frazioni, dette *fratti semplici*: - se al denominatore c'è un fattore di primo grado, al numeratore ci sarà una costante (grado 0); - se al denominatore c'è un polinomio di secondo grado, al numeratore ci sarà un polinomio di primo grado, cioè un'espressione del tipo $ax + b$; - se al denominatore un fattore compare elevato a una potenza, bisogna scrivere una somma di frazioni che hanno come denominatori le potenze dal grado 1 fino al grado massimo.

Una volta scritta questa somma, si moltiplica tutto per il denominatore di partenza e si ottiene un'identità tra polinomi. Confrontiamo allora i coefficienti dei polinomi a sinistra e a destra, grado per grado, ottenendo un sistema di equazioni lineari. Risolvendo questo sistema, determiniamo tutte le costanti a, b, c, \dots che compaiono nei numeratori.

In questo modo la nostra frazione di partenza è spezzata in una somma di fratti semplici, e quindi anche l'integrale si spezza in tanti integrali più semplici.

4.2.2 Parte II: Integrazione dei fratti semplici

1. Fattori lineari. Per un denominatore del tipo $(x - \alpha)$, avremo integrali della forma

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C.$$

Se il fattore lineare compare elevato a una potenza maggiore, cioè $(x - \alpha)^m$ con $m \geq 2$, l'integrale diventa

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^m} dx = \frac{-A}{(m - 1)(x - \alpha)^{m-1}} + C.$$

2. Polinomi di secondo grado. Consideriamo ora un denominatore del tipo

$$x^2 + bx + c,$$

Che non si può fattorizzare. L'integrale da calcolare è della forma

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c} dx.$$

Step A: eliminare il termine di primo grado. Facciamo la sostituzione

$$x = t + \gamma,$$

Dove scegliamo γ in modo da eliminare il termine in t nel denominatore. Con questa sostituzione, il denominatore diventa un polinomio del tipo

$$t^2 + k,$$

Oppure, più in generale,

$$at^2 + b,$$

Cioè un termine di secondo grado più un termine noto.

Step B: normalizzare il termine noto. Se il denominatore è $at^2 + b$, possiamo raccogliere b e scriverlo come

$$at^2 + b = b \left(\frac{a}{b} t^2 + 1 \right).$$

Step C: normalizzare il coefficiente del termine di secondo grado. Se abbiamo $\frac{a}{b} t^2 + 1$, facciamo la sostituzione

$$\sqrt{\frac{a}{b}} t = s,$$

Così che il denominatore diventi

$$s^2 + 1.$$

Conclusion. Abbiamo ridotto l'integrale a una delle due forme fondamentali:

$$\int \frac{ds}{s^2 + 1} = \arctan(s) + C,$$

Oppure

$$\int \frac{s}{s^2 + 1} ds = \frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + C,$$

A seconda che al numeratore ci sia una costante o un termine di primo grado.

In questo modo, con una sequenza di sostituzioni semplici, tutti i casi con denominatori di secondo grado si riconducono a integrali noti.

4.3 Tutti i tipi di integrali

1.

$$\int x^3 dx$$

2.

$$\int \sqrt[4]{x^3} dx$$

3.

$$\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$

4.

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Con $t = \ln(x)$

5.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$$

6.

$$\int \frac{x^3 + 9x}{x-3} dx$$

7.

$$\int \frac{6}{(x-3)(x+2)} dx$$

8.

$$\int \frac{x^2 + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$$

9.

$$\int \sin(x^2) 2x dx$$

10.

$$\int \cos(x^3) x^2 dx$$

11.

$$\int e^{\cos(x)} \sin(x) dx$$

12.

$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

13.

$$\int \tan(x) dx$$

14.

$$\int e^{\sin(x^2+2)} \cos(x^2+2) x dx$$

15.

$$\int \ln(x) \left(x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} \right) dx$$

16.

$$\int (x+2) \sin(x) dx$$

17.

$$\int x^2 e^x dx$$

18.

$$\int (\ln(x))^2 x dx$$

5 Studio di insiemi

Per ciascun insieme $S \subset \mathbb{R}$ stabilire:

- se è limitato / illimitato superiormente e inferiormente e dire $\inf S$ e $\sup S$;
- se ammette minimo e/o massimo e, in caso affermativo, determinarli;
- se è chiuso;
- se è aperto;
- se è un intervallo;

(i)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$$

.

(ii)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq 0\}$$

.

(iii)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq -x(x-1)\}$$

.

(iv)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = 1/n \forall n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x > 1/100\}$$

.

(v)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\}$$

.

(vi)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = n + n(-1)^n \forall n \in \mathbb{N}\}$$

.

(vii)

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x-1) > 0\}$$

.

(viii)

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R} : \cos(n) < x < \cos(n+1)\}$$

.

Per ciascuno dei seguenti insiemi $S \subset \mathbb{R}^2$:

- stabilire se è **limitato** oppure **illimitato**;
- stabilire se è **aperto**, **chiuso** oppure né aperto né chiuso;
- stabilire se è **connesso** (e, se non lo è, descrivere il numero e il tipo delle componenti connesse);
- fornire una **descrizione qualitativa della forma** (es. strisce, anelli, lobi, regioni al di sopra/sotto curve, ecc.) e, dove utile, indicare/escludere esplicitamente la *frontiera*.

(a)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1\}$$

.

(b)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)y^2 \leq (x^2 - 1)\}$$

.

(c)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}$$

.

(d)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)y > x^3 + xy^2\}$$

.

(e)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y|x \geq 0\}$$

.

(f)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0\}$$

.

(g)

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{x^2 + y^2 - 1} \geq 0 \right\}$$

.

(h)

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x+y|}{x} \geq 0 \right\}$$

.

(i)

$$S = \{(x, y) : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 9\}$$

.

(j)

$$S = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

.

(k)

$$S = \{(x, y) : |x| \geq |y|\}$$

.

(l)

$$S = \{(x, y) : xy \geq 1\}$$

.

(m)

$$S = \{(x, y) : xy(x^2 + y^2 - 4) \leq 0\}$$

.

(n)

$$S = \{(x, y) : (x - 1)(y + 1)(x + y - 2) \geq 0\}$$

.

(o)

$$S = \{(x, y) : (x \leq 0) \cup (y \geq 1)\}$$

.

(p)

$$S = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}\}$$

.

6 Studi di funzione

6.1 Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni

1.

$$f(x) = \sqrt{\arccos(x - 4) - \arccos\left(\frac{3}{x + 1}\right)}.$$

2.

$$f(x) = \log_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\arccos(x - 3) - \arccos\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\right).$$

3.

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^{x^2 - 4}(x^2 + x + 4)}{\arccos(x + 1) - \arccos\sqrt{x^2 + 5x + 6}}}.$$

4.

$$f(x) = \frac{(x + 1)^2}{|x| - 4}.$$

5.

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 3} e^{-x}.$$

6.

$$f(x) = \left(1 - \frac{\log_{1/\pi}(x^2 - 2x - 3)}{\log_{1/\pi}(x - 1)} \right)^\pi.$$

7.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}.$$

8.

$$g(x) = 1 - \frac{-3^x + 2}{\ln(x - 1)}.$$

9.

$$f(x) = \sqrt{\arccos(2x - 1) - \arccos(x^2 - 4)}.$$

10.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\arcsin(3 - 2x) - \arcsin(x^2 - 3x) \right).$$

11.

$$f(x) = \log_3 \left(\sqrt{\arccos(x - 2) - \arccos(1 - x^2)} \right).$$

12.

$$f(x) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{1 + \ln^2 x}\right)}.$$

13.

$$f(x) = \log_5 \left(\arcsin\left(\frac{x}{1 + x^2}\right) - \arcsin\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \right).$$

14.

$$f(x) = \log_3 \left(\sqrt{\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) - \arccos\left(\frac{x - 2}{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}\right)} \right).$$

15.

$$f(x) = \left(\arccos\left(\frac{x}{1 + x^2}\right) - \arccos\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) \right)^{\sqrt{2}}.$$

16.

$$f(x) = \sqrt{\arccos(\sqrt{1 - x}) - \arccos(\sqrt{x})}.$$

17.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}}.$$

18.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right).$$

19.

$$f(x) = \sqrt[4]{\ln(x - 1)}.$$

20.

$$f(x) = \log_x(x^2 - 5x + 6).$$

21.

$$f(x) = (\ln x)^{\sqrt{x}}.$$

22.

$$f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 4x + 5) - \sqrt{3 - x}}.$$

23.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

24.

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}).$$

25.

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(x)}{\ln(2-x)}}.$$

26.

$$f(x) = \log_{|x-2|}(x).$$

6.2 Studia le seguenti funzioni e tracciane il grafico

1.

$$y = 3x - x^3$$

2.

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

3.

$$y = x + \sqrt{x}$$

4.

$$y = xe^x$$

5.

$$y = \ln(x^2 + 2x + 1)$$

6.

$$\frac{|x-1|}{x}$$

7.

$$\sqrt{|x^2 - 4|}$$

7 Equazioni nel campo dei numeri complessi

1.

$$z^2 = -1$$

2.

$$z^3 = 1$$

3.

$$z^2 = 2i$$

4.

$$z^4 = -1$$

5.

$$z^2 = (1-i)^3$$

6.

$$z^3 = 8e^{i\pi/6}$$

7. $z^3 = -i(1-i)^3$
8. $z^4 = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$
9. $z^4 = e^{i\pi}(1-i)^2$
10. $z + \text{Im}(z) = 1 + i$
11. $z - \text{Re}(z) = 2i$
12. $z + \text{Re}(z) = i$
13. $z - \text{Im}(z) = 3$
14. $z^2 + \text{Im}(z) = 1$
15. $|z|^2 + z = 1 + i$
16. $z^2 + z + 1 = 0$

8 Equazioni differenziali

8.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono del tipo:

$$y' = g(t) \cdot f(y) \quad (1)$$

Quindi hanno la derivata prima con esponente 1, e un prodotto tra una funzione di t detta $g(t)$ e una funzione di y detta $f(y)$. Per risolvere queste equazioni differenziali basta scrivere y' come rapporto tra i differenziali, $y' = \frac{dy}{dt}$ e portare tutte le t a destra e tutte le y a sinistra, poi bisogna integrare le funzioni a destra e sinistra ed esplicitare y .

1. $y' = y^2 \sin(t)$
2. $y' = y^2(2t + 1)$
3. $y' - \frac{1 + y^2}{t} = 0$
4. $3y' = ye^t$
5. $y' = e^{yt}$

8.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

8.2.1 Teoria

Sono del tipo:

$$y' + g(t)y = f(t) \quad (2)$$

1. Identifico la funzione $g(t)$
2. Trovo l'integrale di $g(t)$: $\int g(t) = G(t)$
3. Moltiplico tutti i termini per $e^{G(t)}$ ottenendo $y'e^{G(t)} + e^{G(t)}g(t)y = f(t)e^{G(t)}$

4.

$$\frac{d(G(t) \cdot y)}{dt} = f(t)e^{G(t)}$$

5. Porto il dt a destra e faccio l'integrale ad ambo i membri:

$$G(t) \cdot y = \int f(t)e^{G(t)} dt$$

6. Dopo aver svolto l'integrale è possibile esplicitare la y

8.2.2 Esercizi

1.

$$y' - y = t$$

2.

$$y' - \frac{1+y}{t} = 0$$

3.

$$y' + yt = 5t$$

4.

$$y' - 2yt = 2t$$

5.

$$y' - \sin(t)y = \sin(t)$$

8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Sono del tipo:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \quad (3)$$

Per risolverle occorre trovare le 2 soluzioni, anche complesse, della corrispondente equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + cx = 0 \quad (4)$$

Le soluzioni possono essere 2 soluzioni distinte reali se $\delta > 0$, due soluzioni coincidenti se $\Delta = 0$, oppure due soluzioni complesse coniugate se $\Delta < 0$. In base a quale di questi tre casi si verifica avremo 3 soluzioni λ_1 e λ_2 diverse.

$\Delta > 0$	$C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$C_1e^{\lambda_1 t} + C_2te^{\lambda_2 t}$
$\Delta < 0 \implies \lambda_{1,2} = a \pm ib$	$C_1e^{at} \cos(bt) + C_2e^{at} \sin(bt)$

1.

$$2y'' + 5y' + 2y = 0$$

2.

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

3.

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

8.4 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine non omogenee a coefficienti costanti

Sono del tipo:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t) \quad (5)$$

Ma dividendo entrambi i membri per a ci si deve ricondurre al caso in cui $a = 1$.

Bisogna prima risolvere l'equazione differenziale eliminando il membro a destra $g(t)$:

$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ La soluzione di questa equazione differenziale possiamo chiamarla y_0 perchè è stata ottenuta mettendo lo 0 a destra nell'equazione. Per ottenere questa soluzione basta utilizzare il metodo per la risoluzione delle equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti. Questa soluzione sarà sempre della forma

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) \quad (6)$$

Dove y_1 può essere $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ oppure $y_1 = e^{at} \cos(bt)$, mentre t_2 può essere $y_2 = e^{\lambda_2 t}$, $y_2 = te^{\lambda_2 t}$ oppure $y_2 = e^{at} \sin(bt)$. Bisogna poi sommare a y_0 una soluzione \bar{y} detta particolare, perchè non dipende dai coefficienti C_1 e C_2 . Per trovarla basta individuare le funzioni $y_1(t)$, $y_2(t)$, $g(t)$, e risolvere il seguente sistema per trovare due espressioni particolari per le funzioni $\bar{C}_1(t)$ e $\bar{C}_2(t)$:

$$\begin{cases} \bar{C}_1' y_1 + \bar{C}_2' y_2 = 0 \\ \bar{C}_1' y_1' + \bar{C}_2' y_2' = g(t) \end{cases} \quad (7)$$

A questo punto avremo la soluzione particolare \bar{y} che dovremmo sommare alla soluzione ottenuta mettendo lo 0 a destra dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_0 + \bar{y} \quad (8)$$

1.

$$2y'' + 5y' + 2y = 4x$$

2.

$$y'' + 4y' + 5y = 8\sin(x)$$

3.

$$4y'' + 4y' + y = 9e^x$$

9 Serie numeriche

Sia data la serie

$$\sum_{n=n_i}^{\infty} a_n \quad (9)$$

Se questa è una serie a segni alterni potrà essere studiata con il criterio di Leibniz, Altrimenti potrà essere studiata con il criterio del confronto asintotico.

9.1 Criterio del confronto asintotico per serie

1. Studiare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$: se il risultato del limite è 0 la serie può convergere. Se il limite esiste, finito o infinito, la serie diverge. Se il limite non esiste la serie può divergere o essere irregolare.
2. Studiare il segno di a_n imponendo $a_n > 0$: se la soluzione della disequazione è $n > K$, dove k è un qualsiasi numero reale, allora la serie è definitivamente positiva. Altrimenti è possibile moltiplicare fuori e dentro la serie per -1 ottenendo $-\sum_{n=n_i}^{\infty} -a_n$. Se anche in questo caso non si ottiene come risultato della disequazione $n > K$, è possibile che sia una serie a segni alterni; in caso contrario si potrà studiare la convergenza assoluta della serie.

3. Scegliere una seconda successione b_n diversa da zero per ogni n . Bisogna scegliere una successione che si ritiene abbia lo stesso carattere della successione di partenza a_n ma che sia facilmente riconducibile a una serie armonica o a una serie geometrica.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l & \text{le serie hanno lo stesso carattere} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 & \text{se quella nuova converge anche quella vecchia converge, ma non vale il contrario} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty & \text{se quella nuova diverge anche quella vecchia diverge, ma non vale il contrario} \end{cases} \quad (10)$$

9.1.1 Esercizi guidati sul confronto asintotico

Studiare la convergenza delle seguenti serie operando un confronto asintotico con le funzioni suggerite.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} - 1$$

Con $b_n = \frac{1}{n}$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$$

Con $b_n = \frac{1}{n^2}$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Con $b_n = \frac{1}{n^2}$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$$

Con $b_n = \frac{1}{n^3}$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Con $b_n = \frac{1}{n}$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Con $b_n = \frac{1}{n^2}$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \left(\cos\sqrt{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

Con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

9.2 Serie a segno alterno e criterio di Leibniz

1. Studiare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$: se il risultato del limite è 0 la serie può convergere. Se il limite esiste, finito o infinito, la serie diverge. Se il limite non esiste la serie può divergere o essere irregolare.
2. Ricondurre la serie a una forma del tipo $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$. Ogni volta che si parla di a_n ci si riferisce alla successione a cui è stato tolto il fattore a segni alterni.
3. Studiare il segno di a_n imponendo $a_n > 0$. Se la soluzione della disequazione è $n > K$, dove k è un qualsiasi numero reale, allora la serie è definitivamente positiva. Altrimenti è possibile moltiplicare fuori e dentro la serie per -1 ottenendo $-\sum_{n=n_i}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Se anche in questo caso non si ottiene come risultato della disequazione $n > K$, è possibile che a_n sia a segni alterni. In questo caso abbiamo 2 segni alterni che si semplificano. Dopo la semplificazione si potrà usare il confronto asintotico. Se invece a_n non è definitivamente positiva e neanche a segni alterni, si potrà studiare la convergenza assoluta.
4. Studiare la non crescita della serie imponendo $a_n \geq a_{n+1}$. Se la soluzione di questa disequazione è $n \geq K$ dove k è un qualsiasi numero reale, allora a_n è definitivamente non crescente e la serie converge. Alternativamente si può studiare la non decrescenza studiando la derivata a'_n : se la soluzione della disequazione $a'_n \leq 0$ è $n \geq k$ dove k è un qualsiasi numero reale, allora a_n è definitivamente non crescente e la serie converge.

9.3 Cosa fare se a_n non è né a segni alterni, né definitivamente positiva e né definitivamente negativa

In questo caso raro è possibile studiare la serie $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$. Questa è sempre positiva per definizione di modulo. Se questa nuova serie converge, diremo che la serie originale "converge assolutamente" e se una serie converge assolutamente allora converge anche semplicemente. Mentre se una serie diverge assolutamente allora niente si potrà dire sulla convergenza semplice.

9.4 Esercizi

1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{\sqrt{\frac{1}{n}}}}{n}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2) \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}}$$

6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \sqrt{-1 + e^{\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} + 5n^3}{(n+1)(n+2)n}$$

8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n-1}{n(n^2+2n+1)}\right)$$

9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^n$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{(n^2)}$$

10 Formulario

10.1 Valori e Limiti Importanti di Funzioni Fondamentali

1. e^x :

•

$$e^0 = 1$$

•

$$e^1 = e$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

2. e^{-x} (o $(\frac{1}{e})^x$):

•

$$e^{-0} = 1$$

•

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$

3. $\ln(x)$:

•

$$\ln(1) = 0$$

•

$$\ln(e) = 1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

4. $\log_{\frac{1}{e}}(x)$:

•

$$\log_{\frac{1}{e}}(1) = 0$$

•

$$\log_{\frac{1}{e}}(e) = -1$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{e}}(x) = \infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{e}}(x) = -\infty$$

5. $\sin(x)$ e $\cos(x)$:

•

$$\sin(0) = 0, \cos(0) = 1$$

•

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

•

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

•

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

•

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

6. $\tan(x)$:

•

$$\tan(0) = 0$$

•

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

•

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

•

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

• $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ non definito

•

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

7. $\arctan(x)$:

-
-
-
-

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

10.2 Formulario di Trigonometria

10.2.1 Identità fondamentale della trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

10.2.2 Formule di Somma e Sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

10.2.3 Formule di Bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

10.2.4 Formule Parametriche (o di Prostaferesi)

$$\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

10.2.5 Formule di Duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

10.2.6 Formule di Triplicazione

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \\ \cos(3\alpha) &= 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) \\ \tan(3\alpha) &= \frac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

10.2.7 Formule di Conversione Angolo-Area

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \\ \cos(\alpha) &= \frac{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} \\ \tan(\alpha) &= \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}\end{aligned}$$

10.3 Derivate

10.3.1 Derivate notevoli

1. Funzione Potenza x^n :

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

2. Funzione Potenza x^n :

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Le radici e le potenze al denominatore rientrano in questa categoria. In particolare le radici rappresentano il denominatore dell'esponente della potenza mentre le potenze che appaiono a denominatore possono essere portate a numeratore invertendo il segno dell'esponente.

Esempi:

(a) Per x^2 , abbiamo $\frac{d}{dx}x^2 = 2x^{2-1} = 2x$.

(b) Per x^3 , $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$.

(c) Per $x^{1/2}$ (che è lo stesso che \sqrt{x}), $\frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(d) Per x^{-1} (che è lo stesso che $\frac{1}{x}$), $\frac{d}{dx}x^{-1} = -1 \cdot x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

3. Funzione Esponenziale e^x :

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

4. Funzione Logaritmica $\log(x)$ o $\ln(x)$:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

5. Funzione Seno $\sin(x)$:

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$$

6. Funzione Coseno $\cos(x)$:

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

7. Funzione Tangente $\tan(x)$:

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$$

8. Funzione Secante $\sec(x)$:

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \tan(x)$$

9. Funzione Cosecante $\csc(x)$:

$$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cot(x)$$

10. Funzione Cotangente $\cot(x)$:

$$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x)$$

11. Funzione Arcoseno $\sin^{-1}(x)$ o $\arcsin(x)$:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12. Funzione Arcocoseno $\cos^{-1}(x)$ o $\arccos(x)$:

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

13. Funzione Arcotangente $\tan^{-1}(x)$ o $\arctan(x)$:

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

10.3.2 Regole di derivazione

1. Derivata di una funzione per una costante moltiplicativa:

$$\frac{d}{dx} (c \cdot f(x)) = c \cdot \frac{d}{dx} f(x) \quad (11)$$

Dove c è una costante. Questa regola stabilisce che la derivata di una funzione moltiplicata per una costante è uguale alla costante moltiplicata per la derivata della funzione. La presenza di una costante non influisce sulla "forma" della derivata della funzione.

2. La derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate:

$$\frac{d}{dx} (f(x) + g(x) + h(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x) + \frac{d}{dx} h(x) \quad (12)$$

Solitamente è conveniente evitare di fattorizzare, svolgere tutte le moltiplicazioni e avere i polinomi in forma normale al fine di poter spezzare le derivate il più possibile.

3. Derivata di un prodotto. Ottengo tanti termini quanti sono i fattori, in ogni termine viene derivato un solo fattore mentre tutti gli altri rimangono invariati:

$$\frac{d}{dx} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \quad (13)$$

La derivata di una divisione può essere trasformata in una moltiplicazione per l'inverso della funzione a denominatore, ottenendo la seguente regola di derivazione:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (14)$$

4. Derivata di una funzione composta:

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (15)$$

10.4 Sviluppi di Taylor e di Maclaurin

10.4.1 Sviluppo di Taylor

Lo sviluppo di Taylor di una funzione $f(x)$ attorno al punto a è dato dalla formula:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \quad (16)$$

Dove $f^{(n)}(a)$ è la derivata n-esima di f valutata in a , e $R_n(x)$ è il termine di resto.

10.4.2 Sviluppo di Maclaurin

Lo sviluppo di Maclaurin è un caso particolare dello sviluppo di Taylor in cui $a = 0$. La formula diventa:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \quad (17)$$

1. Sviluppo di Maclaurin della funzione esponenziale e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8)$$

2. Sviluppo di Maclaurin della funzione seno $\sin(x)$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^9)$$

3. Sviluppo di Maclaurin della funzione coseno $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$$

4. Sviluppo di Maclaurin del logaritmo naturale $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^8)$$

5. Sviluppo di Maclaurin della funzione $(1+x)^n$ (con n non necessariamente intero):

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^5 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6!}x^6 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7!}x^7 + \mathcal{O}(x^8)$$

6. Sviluppo di Maclaurin della funzione arcotangente $\arctan(x)$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \mathcal{O}(x^9)$$

10.5 Asintoti

10.5.1 Asintoti Verticali

Per trovare gli asintoti verticali di una funzione $f(x)$, si cerca di capire il comportamento di $f(x)$ quando x si avvicina a un certo valore a dove la funzione non è definita o diventa illimitata. In formule:

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \text{ allora esiste un asintoto verticale in } x = a. \quad (18)$$

10.5.2 Asintoti Orizzontali

Gli asintoti orizzontali si verificano quando x tende all'infinito. Si trovano calcolando i limiti:

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L, \text{ allora esiste un asintoto orizzontale in } y = L. \quad (19)$$

10.5.3 Asintoti Obliqui

Un asintoto obliquo esiste quando la funzione si avvicina a una retta non orizzontale all'infinito. Si verifica se:

$$\text{Esistono i limiti } m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx], \text{ con } m \neq 0. \quad (20)$$

$$\text{In tal caso, l'asintoto obliquo è la retta } y = mx + q. \quad (21)$$

10.6 Integrali

10.6.1 Integrali notevoli

1. Integrale di una potenza di x :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{per } n \neq -1$$

Esempi:

(a)

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

(b)

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

(c)

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

(d)

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

(e)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} + C$$

2. Integrale della funzione esponenziale:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

3. Integrale della funzione seno:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

4. Integrale della funzione coseno:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

5. Integrale di $\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

6. Integrale di $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

10.6.2 Regole di integrazione

1. Integrazione per Sostituzione: Per calcolare un integrale del tipo $\int f(g(x)) dx$, si può fare un cambio di variabile $u = g(x)$. Le istruzioni sono:
 - (a) Scegliere una sostituzione adatta $u = g(x)$.
 - (b) Calcolare il differenziale $du = g'(x) dx$.
 - (c) Riscrivere l'integrale in termini di u e du .
 - (d) Risolvere l'integrale in termini di u .
 - (e) Sostituire indietro x per esprimere la soluzione in termini di x .

La formula generale dopo la sostituzione diventa:

$$\int f(g(x)) dx = \int f(u) \frac{du}{g'(x)} \quad (22)$$

2. Integrazione per Parti: Per due funzioni $u(x)$ e $v(x)$ differenziabili:

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx \quad (23)$$

10.6.3 Integrali di Funzioni Razionali

Per risolvere un integrale di una funzione razionale del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi, seguire questi passaggi:

- (a) **Divisione Polinomiale (se necessario):** Se il grado di $P(x)$ è maggiore o uguale al grado di $Q(x)$, eseguire la divisione polinomiale per riscrivere l'integrale in una forma più semplice.
- (b) **Fattorizzazione:** Fattorizzare il denominatore $Q(x)$ nei suoi fattori lineari e/o quadrati irriducibili.
- (c) **Decomposizione in Frazioni Parziali:** Decomporre la frazione in somma di frazioni più semplici. La forma della decomposizione dipende dalla fattorizzazione del denominatore.
- (d) **Integrazione:** Integrare ciascuna frazione.

11 Glossario

11.1 Funzioni

Funzione Continua: Una funzione è continua in un punto x_0 se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Il limite della funzione esiste in x_0 .
2. Il limite della funzione in x_0 è uguale al valore della funzione in quel punto, ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. I limiti destro e sinistro in x_0 sono uguali, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Una funzione è continua in un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Funzione Derivabile: Una funzione è derivabile in un punto x_0 se soddisfa le seguenti condizioni:

1. La funzione è continua in x_0 .
2. Esistono le derivate destre e sinistre in x_0 e sono uguali, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, la derivata di f in x_0 è il valore comune di questi limiti. Una funzione è derivabile in un intervallo se è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

Funzione Iniettiva (Iniezione): Una funzione è iniettiva se elementi diversi del dominio vengono mappati in elementi diversi del codominio. In termini matematici, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

Metodo Pratico per Verificare l'Iniettività:

1. **Analisi Grafica:** Su un grafico, una funzione è iniettiva se ogni linea orizzontale interseca il grafico al massimo in un punto. Questo è noto come il "test della linea orizzontale".
2. **Analisi della Derivata:** Se la funzione è derivabile, è iniettiva in un intervallo dove la sua derivata non cambia segno (cioè, è sempre positiva o sempre negativa). Questo perché una derivata che mantiene lo stesso segno indica che la funzione è monotona in quell'intervallo, e le funzioni monotone sono iniettive.

Funzione Suriettiva (Suriezione): Una funzione è suriettiva se ogni elemento del codominio è l'immagine di almeno un elemento del dominio.

Funzione Biettiva (Biezione o Biunivoca): Una funzione è biettiva se è sia iniettiva che suriettiva. In questo caso, esiste una corrispondenza uno-a-uno tra gli elementi del dominio e quelli del codominio.

Funzione Monotona: Una funzione è detta monotona se mantiene lo stesso ordine tra gli elementi del suo dominio e del codominio. In termini di derivata, una funzione $f(x)$ è monotona crescente in un intervallo se la sua derivata $f'(x)$ è non negativa ($f'(x) \geq 0$) in quell'intervallo; è monotona decrescente se $f'(x)$ è non positiva ($f'(x) \leq 0$).

Funzione Strettamente Monotona: Una funzione è detta strettamente monotona se è monotona e non ammette valori costanti in nessun intervallo. Dal punto di vista della derivata, una funzione è strettamente monotona in un intervallo se la sua derivata $f'(x)$ è positiva o negativa in quasi tutti i punti dell'intervallo, consentendo la possibilità che $f'(x)$ sia zero in punti isolati senza che ciò comprometta la stretta monotonia.

Nel caso di $f(x) = x^3$, la sua derivata $f'(x) = 3x^2$ è zero solo in $x = 0$, ma poiché nei punti vicini a zero la derivata è positiva, la funzione continua a essere strettamente crescente. Pertanto, $f(x) = x^3$ è un esempio di funzione strettamente crescente su tutto il suo dominio, nonostante il fatto che la sua derivata sia zero in un punto.

11.1.1 Punti Estremanti e Punti Critici di una Funzione

Punti Estremanti Relativi: Un punto x_0 è detto punto di estremo relativo (massimo o minimo) per una funzione $f(x)$ se esiste un intervallo aperto che contiene x_0 in cui $f(x_0)$ è rispettivamente il massimo o il minimo di $f(x)$ su quell'intervallo.

Punti Estremanti Assoluti: Un punto x_0 è un punto di estremo assoluto (massimo o minimo) per $f(x)$ su un intervallo I se $f(x_0)$ è rispettivamente il massimo o il minimo di $f(x)$ su tutto l'intervallo I .

Punti Critici: Un punto x_0 è un punto critico di $f(x)$ se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

1. La derivata $f'(x_0)$ non esiste.
2. La derivata $f'(x_0)$ è uguale a zero.

I punti critici sono importanti perché sono i candidati per essere punti di massimo o minimo locale della funzione.

Come Trovare Punti Estremanti e Critici:

1. Calcolare la derivata $f'(x)$ della funzione.
2. Identificare i punti in cui $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ non esiste. Questi sono i punti critici.
3. Usare il test della derivata prima o seconda (a seconda del contesto) per determinare se i punti critici sono punti di massimo o minimo locale.
4. Per identificare gli estremi assoluti, confrontare i valori della funzione nei punti critici e agli estremi dell'intervallo di definizione di f .

Concavità, Convessità e Punti di Flesso

Funzione Concava: Una funzione $f(x)$ è concava in un intervallo se, presi qualsiasi due punti x_1 e x_2 in quell'intervallo, la linea che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova al di sotto del grafico di $f(x)$ nell'intervallo. In termini di derivata seconda, $f(x)$ è concava dove $f''(x) < 0$.

Funzione Convessa: Una funzione $f(x)$ è convessa in un intervallo se, presi qualsiasi due punti x_1 e x_2 in quell'intervallo, la linea che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ si trova sopra il grafico di $f(x)$. In termini di derivata seconda, $f(x)$ è convessa dove $f''(x) > 0$.

Punto di Flesso: Un punto x_0 è un punto di flesso per la funzione $f(x)$ se la concavità della funzione cambia passando attraverso x_0 . Questo significa che $f(x)$ passa da concava a convessa, o viceversa, in x_0 . Un punto di flesso può spesso essere identificato laddove la derivata seconda $f''(x)$ cambia segno.

Come Studiare Concavità, Convessità e Punti di Flesso:

1. Calcolare la derivata seconda $f''(x)$ della funzione.
2. Determinare dove $f''(x) > 0$ (funzione convessa) e dove $f''(x) < 0$ (funzione concava).
3. Identificare i punti in cui $f''(x)$ cambia segno. Questi sono i candidati per essere punti di flesso.
4. Verificare ciascun punto candidato per confermare che si tratti effettivamente di un punto di flesso.

Funzione Continua: Una funzione è continua in un punto x_0 se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Il limite della funzione esiste in x_0 .
2. Il limite della funzione in x_0 è uguale al valore della funzione in quel punto, ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. I limiti destro e sinistro in x_0 sono uguali, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Una funzione è continua in un intervallo se è continua in ogni punto dell'intervallo.

Funzione Derivabile: Una funzione è derivabile in un punto x_0 se soddisfa le seguenti condizioni:

1. La funzione è continua in x_0 .
2. Esistono le derivate destre e sinistre in x_0 e sono uguali, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, la derivata di f in x_0 è il valore comune di questi limiti. Una funzione è derivabile in un intervallo se è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

Funzione Iniettiva (Iniezione): Una funzione è iniettiva se elementi diversi del dominio vengono mappati in elementi diversi del codominio. In termini matematici, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

Metodo Pratico per Verificare l'Iniettività:

1. *Analisi Grafica:* Su un grafico, una funzione è iniettiva se ogni linea orizzontale interseca il grafico al massimo in un punto. Questo è noto come il "test della linea orizzontale".
2. *Analisi della Derivata:* Se la funzione è derivabile, è iniettiva in un intervallo dove la sua derivata non cambia segno (cioè, è sempre positiva o sempre negativa salvo punti isolati in cui può essere nulla). Questo perché una derivata che mantiene lo stesso segno indica che la funzione è monotona in quell'intervallo, e le funzioni monotone sono iniettive.

Funzione Suriettiva (Suriezione): Una funzione è suriettiva se ogni elemento del codominio è l'immagine di almeno un elemento del dominio.

Funzione Biettiva (Biezione o Biunivoca): Una funzione è biettiva se è sia iniettiva che suriettiva. In questo caso, esiste una corrispondenza uno-a-uno tra gli elementi del dominio e quelli del codominio.

Ordine di Infinito e infinitesimo: L'ordine di infinito di una funzione $f(x)$ quando x tende a un valore a (che può essere un numero finito o infinito) è un modo per quantificare quanto velocemente la funzione "diventa infinita". Formalmente, se $f(x)$ è un infinito di ordine n rispetto a x per $x \rightarrow a$, scritto come

$f(x) = \mathcal{O}(x)$ per $x \rightarrow a$, significa che il limite del rapporto $\frac{f(x)}{x^n}$ è finito e non nullo quando $x \rightarrow a$. Analogamente, l'ordine di infinitesimo di una funzione $f(x)$ quando x tende a un valore a è un modo per quantificare quanto velocemente la funzione "diventa zero". Se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine n rispetto a x per $x \rightarrow a$, scritto come $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow a$, significa che il limite del rapporto $\frac{f(x)}{x^n}$ è finito e non nullo quando $x \rightarrow a$.

Relazione tra Ordine di Infinito e Ordine di Infinitesimo L'ordine di infinito di una funzione può essere inteso in termini dell'ordine di infinitesimo dell'inverso della funzione. In particolare, se una funzione $f(x)$ diventa infinita come x si avvicina a un valore a , allora $\frac{1}{f(x)}$ diventa un infinitesimo. In questo senso, l'ordine di infinito di $f(x)$ è l'ordine di infinitesimo di $\frac{1}{f(x)}$.

Viceversa, se una funzione $g(x)$ è un infinitesimo mentre x si avvicina a a , allora l'inverso di $g(x)$, ovvero $\frac{1}{g(x)}$, diventa infinito mentre x si avvicina a a . In questo modo, l'ordine di infinitesimo di $g(x)$ è legato all'ordine di infinito di $\frac{1}{g(x)}$.

11.1.2 Punti Estremanti e Punti Critici di una Funzione

Punti Estremanti Relativi: Un punto x_0 è detto punto di estremo relativo (massimo o minimo) per una funzione $f(x)$ se esiste un intervallo aperto che contiene x_0 in cui $f(x_0)$ è rispettivamente il massimo o il minimo di $f(x)$ su quell'intervallo.

Punti Estremanti Assoluti: Un punto x_0 è un punto di estremo assoluto (massimo o minimo) per $f(x)$ su un intervallo I se $f(x_0)$ è rispettivamente il massimo o il minimo di $f(x)$ su tutto l'intervallo I .

Punti Critici: Un punto x_0 è un punto critico di $f(x)$ se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

1. La derivata $f'(x_0)$ non esiste.
2. La derivata $f'(x_0)$ è uguale a zero.

I punti critici sono importanti perché sono i candidati per essere punti di massimo o minimo locale della funzione.

Come Trovare Punti Estremanti e Critici:

1. Calcolare la derivata $f'(x)$ della funzione.
2. Identificare i punti in cui $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ non esiste. Questi sono i punti critici.
3. Usare il test della derivata prima o seconda (a seconda del contesto) per determinare se i punti critici sono punti di massimo o minimo locale.
4. Per identificare gli estremi assoluti, confrontare i valori della funzione nei punti critici e agli estremi dell'intervallo di definizione di f .

Funzioni di Classe C^n : Una funzione $f(x)$ è detta di classe C^n su un intervallo se tutte le sue derivate fino all'ordine n sono continue in quell'intervallo. In altre parole, $f(x)$ è di classe C^n se esistono le derivate $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ e tutte queste derivate sono funzioni continue.

Metodo Pratico per Verificare la Classe C^n :

1. Calcolare tutte le derivate di $f(x)$ fino all'ordine n .
2. Verificare che ciascuna di queste derivate esista e sia continua su tutto l'intervallo considerato.
3. Particolare attenzione va data ai punti in cui la funzione o le sue derivate hanno termini potenzialmente discontinui (come divisioni, radici quadrate, ecc.).

Esempio: Una funzione di classe C^0 è semplicemente una funzione continua. Una funzione di classe C^1 ha la prima derivata continua, indicando che la funzione è sia derivabile che continua nella sua derivata. E così via per ordini superiori.