Analisi complessa

Guida alla preparazione dell'esame

Per i corsi di laurea scientifici e di ingegneria

Basata sui programmi più diffusi nelle università italiane

Roberto Rinaldi

www.rinaldiroberto.it

Edizione 2026.05

Indice

Analisi Complessa

1 Glossario operativo

Questo glossario raccoglie i termini che ricorrono piu' spesso negli esercizi del corso. Le definizioni sono operative: servono a riconoscere rapidamente il metodo da usare.

1.1 Numeri complessi e geometria del piano

Parte reale e parte immaginaria Se $z = x + iy$, allora

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Coniugato Se $z = x + iy$, allora

$$\bar{z} = x - iy.$$

Negli esercizi una dipendenza da $\bar{z}$ indica in genere che la funzione non e' olomorfa.

Modulo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le condizioni del tipo $|z - z_0| < R$ descrivono dischi.

Argomento Un numero θ tale che

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

L'argomento e' definito a meno di multipli di 2π.

Disco Insieme del tipo

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Disco forato Insieme del tipo

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Compare nello studio delle singolarita' isolate.

Corona circolare Insieme del tipo

$$r < |z - z_0| < R.$$

E' la regione naturale degli sviluppi di Laurent.

Semipiano Insieme definito da una disuguaglianza lineare, per esempio

$$\operatorname{Re} s > \lambda.$$

Compare nelle trasformate di Laplace.

Frontiera o bordo Il bordo di una regione. Nelle serie di potenze e nelle serie complesse va spesso studiato separatamente.

Supporto Chiusura dell'insieme in cui una funzione e' diversa da zero:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{t : f(t) \neq 0\}}.$$

Funzione caratteristica E' definita da

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Serve a tagliare una funzione su un intervallo o su un insieme.

Funzione di Heaviside Indicata con $H(t)$. Rende causale una funzione:

$$H(t)F(t) = 0 \qquad (t < 0).$$

1.2 Funzioni olomorfe e singolarita'

Funzione olomorfa Funzione complessa derivabile in senso complesso in un aperto. Una funzione olomorfa ammette sviluppo di Taylor locale.

Funzione intera Funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Esempi: e^z, $\sin z$, $\cos z$, polinomi.

Funzione meromorfa

Funzione olomorfa tranne che in poli isolati.

Zero di ordine m Il punto z_0 e' uno zero di ordine m di f se

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Singolarita' isolata Punto z_0 in cui la funzione non e' olomorfa, ma e' olomorfa in un disco forato

$$0 < |z - z_0| < R.$$

Singolarita' eliminabile

Singolarita' in cui la funzione puo' essere ridefinita rendendola olomorfa. Nello sviluppo di Laurent non compaiono potenze negative.

Polo di ordine m Singolarita' isolata in cui la parte principale dello sviluppo di Laurent ha esattamente m termini. Equivalentemente

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Singolarita' essenziale

Singolarita' isolata in cui la parte principale dello sviluppo di Laurent ha infiniti termini.

Parte principale Somma dei termini con potenze negative nello sviluppo di Laurent:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Residuo Coefficiente del termine $(z - z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Residuo all'infinito

Si calcola con

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

Singolarita' all'infinito

Si studia con il cambio

$$w = \frac{1}{z}.$$

Il comportamento di f in ∞ corrisponde al comportamento di $f(1/w)$ in $w = 0$.

1.3 Serie di potenze, Taylor e Laurent

Serie di potenze Serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Centro Il punto z_0 rispetto a cui si sviluppa la serie.

Raggio di convergenza

Numero R tale che la serie converge per $|z-z_0|<R$ e diverge per $|z-z_0|>R$.

Disco di convergenza

Il disco

$$|z-z_0|<R.$$

Studio del bordo Analisi della convergenza per

$$|z-z_0|=R.$$

Il criterio della radice o del rapporto in genere non decide sul bordo.

Convergenza assoluta

La serie $\sum a_n$ converge assolutamente se converge

$$\sum |a_n|.$$

Convergenza puntuale

La serie converge punto per punto, ma non necessariamente in modo uniforme.

Convergenza uniforme

La somma parziale converge alla funzione limite uniformemente su un insieme. Permette spesso scambi tra limite, integrale e derivata.

Sviluppo di Taylor Sviluppo di una funzione olomorfa:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Coefficiente di Taylor

Il coefficiente c_n e' dato da

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Negli esercizi spesso si calcola leggendo i coefficienti delle serie note.

Sviluppo di Laurent

Sviluppo in una corona:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Corona di convergenza

Regione del tipo

$$r<|z-z_0|<R$$

in cui vale uno sviluppo di Laurent.

Criterio della radice

Utile per serie con termini elevati a n:

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Criterio del rapporto
Utile quando e' semplice studiare
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

1.4 Integrali complessi e residui

Curva Applicazione parametrica che descrive un cammino nel piano complesso.

Contorno Curva chiusa, spesso orientata positivamente, cioe' in senso antiorario.

Integrale complesso
Integrale di una funzione complessa lungo una curva:
$$\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Teorema di Cauchy
Se f e' olomorfa in una regione semplicemente connessa, l'integrale lungo ogni contorno chiuso contenuto nella regione e' nullo.

Formula integrale di Cauchy
Se f e' olomorfa all'interno di un contorno γ, allora
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Teorema dei residui
Se f e' olomorfa tranne singolarita' isolate interne a γ, allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Polo interno Singolarita' che si trova dentro il contorno di integrazione. Solo i poli interni contribuiscono al teorema dei residui.

Valore principale Limite simmetrico usato per integrali impropri con singolarita' reali:
$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Lemma di Jordan Risultato che permette di mostrare che l'integrale sull'arco grande tende a zero in alcuni integrali con fattori esponenziali oscillanti.

Parametro sulla circonferenza unitaria
Negli integrali trigonometrici si usa
$$z = e^{it}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

1.5 Fourier, convoluzione e spazi funzionali

Funzione periodica
Una funzione f e' periodica di periodo T se
$$f(t+T) = f(t).$$

Serie di Fourier Rappresentazione di una funzione periodica come somma di seni, coseni o esponenziali complessi.

Coefficienti di Fourier
Numeri che misurano il contributo di ciascuna frequenza nella serie di Fourier.

Convergenza puntuale della serie di Fourier
Nei punti regolari la serie converge alla funzione. Nei punti di salto converge alla media dei limiti laterali.

Trasformata di Fourier
Con la convenzione usata in queste note:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Trasformata inversa di Fourier
Con la stessa convenzione si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Convoluzione Per funzioni su tutta la retta si usa

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds.$$

Convoluzione causale
Per funzioni causali si usa

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Compare soprattutto con Laplace.

Teorema della convoluzione
Per Fourier:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}.$$

Per Laplace causale:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}.$$

Spazio L^1 Funzioni integrabili in valore assoluto:

$$\int |f| < +\infty.$$

Spazio L^2 Funzioni a quadrato integrabile:

$$\int |f|^2 < +\infty.$$

Spazio L^∞ Funzioni essenzialmente limitate.

Parita’ Una funzione e’ pari se $f(-t) = f(t)$, dispari se $f(-t) = -f(t)$. La parita’ semplifica serie e trasformate.

1.6 Trasformata di Laplace

Funzione causale Funzione nulla per $t < 0$. Di solito si scrive con $H(t)$.

Trasformata di Laplace
La definizione usata e'

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt.$$

Ascissa di convergenza
Numero λ_F tale che la trasformata converge nel semipiano

$$\operatorname{Re} s > \lambda_F.$$

Antitrasformata Funzione $F(t)$ la cui trasformata di Laplace e' una funzione assegnata $f(s)$.

Traslazione nel tempo
Un fattore e^{-as} nella trasformata corrisponde a un ritardo:

$$e^{-as} f(s) \longleftrightarrow H(t-a)F(t-a).$$

Traslazione esponenziale
Moltiplicare per e^{at} sposta la variabile:

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}(s-a).$$

Problema di Cauchy in avanti
Equazione differenziale per $t > 0$ con condizioni iniziali assegnate in 0^+. Laplace trasforma il problema in un'equazione algebrica.

Equazione di convoluzione
Equazione in cui l'incognita compare dentro un prodotto di convoluzione. Con Laplace diventa spesso un'equazione algebrica.

1.7 Trasformata Z

Successione Famiglia di valori $\{f_n\}_{n\geq 0}$.

Trasformata Z unilatera
La definizione usata e'

$$F^*(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}.$$

Regione di convergenza
Insieme dei valori di z per cui la serie converge. Spesso e' un esterno di disco:

$$|z| > R.$$

Antitrasformata Z Ricostruzione della successione $\{f_n\}$ a partire da $F^*(z)$.

Equazione alle differenze
Relazione ricorsiva tra valori successivi di una successione, per esempio

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f_n.$$

Condizioni iniziali discrete
Valori come y_0, y_1, necessari per determinare una soluzione unica di un'equazione alle differenze.

Avanzamento Formula che trasforma f_{n+k} in funzione di $F^*(z)$ e dei primi valori della successione.

2 Equazioni nel campo complesso

2.1 Introduzione

In questa sezione raccogliamo gli esercizi di base sulle operazioni multivalore nel piano complesso e sulle equazioni elementari. Sono esercizi brevi, ma ricorrono spesso nelle prove scritte per verificare che lo studente sappia gestire argomenti, rami del logaritmo, radici e periodicita' delle funzioni complesse.

Le categorie principali sono:

1. calcolo di argomenti, logaritmi e potenze complesse;
2. radici n-esime e scelta del ramo;
3. equazioni esponenziali e potenze;
4. equazioni trigonometriche nel campo complesso;
5. relazioni tra funzioni trigonometriche e iperboliche.

2.2 Argomenti, logaritmi e radici

Metodo.

1. **Scrivere il numero in forma polare.** Se $z \neq 0$, si scrive
$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho = |z|, \qquad \theta \in \arg z.$$
2. **Scegliere il ramo dell'argomento.** Per il ramo principale si usa
$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi].$$
Per altri rami bisogna adattare l'intervallo indicato nel testo.
3. **Usare il logaritmo complesso.** I logaritmi di $z \neq 0$ sono
$$\log z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
Il logaritmo principale corrisponde a $k = 0$.
4. **Calcolare le radici.** Le soluzioni di $w^n = z$, con $z = \rho e^{i\theta}$, sono
$$w_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Esercizi.

1. Calcolare $\operatorname{Arg}\left(-ie^{i\pi/3}\right)$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.2.1
2. Calcolare $\operatorname{Arg}\left(ie^{i5\pi/4}\right)$.
3. Calcolare il logaritmo principale di
$$z = -1 + i.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.2.3
4. Calcolare tutti i valori di
$$\log(1 + i\sqrt{3}).$$
5. Calcolare le radici quarte di
$$z = -4.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.2.5

6. Calcolare le radici cubiche di
$$z = 1 + i.$$
7. Calcolare, usando il ramo principale, il valore di
$$(1 + i)^i.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.2.7
8. Determinare un valore di $z \in \mathbb{C}$ per cui
$$\operatorname{Log}(e^{2z}) \neq 2z,$$
dove Log indica il logaritmo principale. Se non esiste, spiegarne il motivo.

2.3 Equazioni esponenziali e potenze

Metodo.

1. **Equazione esponenziale.** Se $w \neq 0$, le soluzioni di
$$e^z = w$$
sono
$$z = \ln|w| + i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
2. **Equazione $z^n = w$.** Se $w \neq 0$, le soluzioni sono le n radici n-esime di w:
$$z_k = |w|^{1/n} e^{i(\operatorname{Arg} w + 2k\pi)/n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$
3. **Descrizione geometrica.** Le soluzioni di $z^n = w$ stanno sui vertici di un poligono regolare con centro nell'origine e raggio $|w|^{1/n}$.

Esercizi.

1. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$e^z = -2i.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.3.1
2. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$e^{2z} = 1 + i.$$
3. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$z^3 = -8i.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.3.3
4. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$z^5 = 32.$$
5. Determinare tutte le soluzioni di
$$e^{iz} = 3.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.3.5
6. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$e^z = e^{1+2i}.$$
7. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$z^4 = 16e^{i\pi/3}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.3.7
8. Descrivere geometricamente l'insieme delle soluzioni di
$$z^6 = -1.$$

2.4 Equazioni trigonometriche complesse

Metodo.

1. **Usare le formule esponenziali.**
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
Ponendo $u = e^{iz}$, molte equazioni diventano quadratiche in u.

2. **Sfruttare periodicita' e simmetrie.** Se z_0 e' una soluzione di $\sin z = w$, allora tutte le soluzioni sono
$$z = z_0 + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad z = \pi - z_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

3. **Per il coseno.** Se z_0 e' una soluzione di $\cos z = w$, allora tutte le soluzioni sono
$$z = \pm z_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizi.

1. Esprimere
$$\sin(iz), \qquad \cos(iz), \qquad \sinh(iz), \qquad \cosh(iz)$$
in termini di funzioni trigonometriche o iperboliche di z.
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.1

2. Sapendo che $z_0 = \frac{\pi}{4} + 2i$ e' una soluzione di
$$\sin z = w,$$
scrivere tutte le soluzioni dell'equazione.

3. Sapendo che $z_0 = \frac{\pi}{6} - i$ e' una soluzione di
$$\cos z = w,$$
scrivere tutte le soluzioni dell'equazione.
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.3

4. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$\sin z = 0.$$

5. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$\cos z = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.5

6. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$\sin z = 2.$$

7. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$\cos z = i.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 2.4.7

8. Risolvere in $\mathbb{C}$
$$\sinh z = i.$$

2.5 Soluzioni degli esercizi

2.5.1 Argomenti, logaritmi e radici

Soluzione esercizio 2.2.1 Calcolare $\operatorname{Arg}\left(-ie^{i\pi/3}\right)$.

Prima riscriviamo $-i$ in forma esponenziale.

$$e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Formula di Eulero.

Quindi

$$-i = e^{-i\pi/2}.$$

Allora

$$-ie^{i\pi/3} = e^{-i\pi/2}e^{i\pi/3} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\pi/6}.$$

Sostituzione. $-i = e^{-i\pi/2}$.
Prodotto tra potenze con la stessa base.

Poiche'

$$-\frac{\pi}{6} \in (-\pi, \pi],$$

si ottiene

$$\operatorname{Arg}\left(-ie^{i\pi/3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Scelta del ramo: argomento principale in $(-\pi, \pi]$.

Torna all'esercizio 2.2.1

Soluzione esercizio 2.2.3 Calcolare il logaritmo principale di

$$z = -1 + i.$$

Calcoliamo il modulo:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Sostituzione $a = -1$, $b = 1$ nella formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Calcoliamo l'argomento principale. Se $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\theta}$, allora

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sostituzione $z = \rho e^{i\theta}$, con $\rho = \sqrt{2}$.

Il punto $(-1, 1)$ sta nel secondo quadrante, quindi

$$\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Scelta del ramo: $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Dunque

$$\operatorname{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}.$$

Risultato.

Il logaritmo principale e'

$$\operatorname{Log}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\operatorname{Arg}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}.$$

Sostituzione $|-1+i| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$.
Proprieta' dei logaritmi: logaritmo di una radice.

Torna all'esercizio 2.2.3

Soluzione esercizio 2.2.5 Calcolare le radici quarte di

$$z = -4.$$

Calcoliamo il modulo:

$$|-4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4.$$

Sostituzione $a = -4$, $b = 0$ nella formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Inoltre

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Formula di Eulero.

Quindi

$$-4 = 4e^{i\pi}.$$

Sostituzione $e^{i\pi} = -1$.

Tutti gli argomenti di -4 sono

$$\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituzione degli argomenti equivalenti.

Le radici quarte si ottengono da

$$w_k = 4^{1/4} e^{i(\pi+2k\pi)/4} = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+k\pi/2)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Formula di De Moivre.
Sostituzione $|-4| = 4$ e $\arg(-4) = \pi + 2k\pi$.

Ora calcoliamo i quattro valori.

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 1 + i.$$

Formula di Eulero.

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i.$$

Formula di Eulero.

$$w_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i.$$

Formula di Eulero.

$$w_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

Formula di Eulero.

Quindi

$$\boxed{w \in \{1 + i,\ -1 + i,\ -1 - i,\ 1 - i\}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.2.5

Soluzione esercizio 2.2.7 Calcolare, usando il ramo principale, il valore di

$$(1 + i)^i.$$

Calcoliamo il modulo:

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Sostituzione $a = 1$, $b = 1$ nella formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Calcoliamo l'argomento principale. Se $1+i=\sqrt{2}e^{i\theta}$, allora

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sostituzione $z=\rho e^{i\theta}$, con $\rho=\sqrt{2}$.

Il punto $(1,1)$ sta nel primo quadrante, quindi

$$\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}.$$

Scelta del ramo: argomento principale in $(-\pi,\pi]$.

Con il ramo principale,

$$\operatorname{Log}(1+i)=\ln|1+i|+i\operatorname{Arg}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}.$$

Sostituzione $|1+i|=\sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$.
Proprieta' dei logaritmi: logaritmo di una radice.

Allora

$$(1+i)^i=e^{i\operatorname{Log}(1+i)}=e^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}\right)}=e^{\frac{i}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}}=e^{-\pi/4}e^{\frac{i}{2}\ln 2}.$$

Sostituzione $\operatorname{Log}(1+i)=\frac{1}{2}\ln 2+i\frac{\pi}{4}$.
Prodotto tra potenze con la stessa base.

Quindi

$$(1+i)^i=e^{-\pi/4}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2}\right).$$

Formula di Eulero.

Torna all'esercizio 2.2.7

2.5.2 Equazioni esponenziali e potenze

Soluzione esercizio 2.3.1 Risolvere in $\mathbb{C}$

$$e^z=-2i.$$

Soluzione.

Calcoliamo il modulo del secondo membro:

$$|-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2.$$

Sostituzione $a=0$, $b=-2$ nella formula $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Prima riscriviamo $-i$ in forma esponenziale.

$$e^{i\pi/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

Formula di Eulero.

Quindi

$$-i=e^{-i\pi/2}.$$

Allora

$$-2i=2e^{-i\pi/2}.$$

Sostituzione. $-i=e^{-i\pi/2}$.

Tutti gli argomenti di $-2i$ sono

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Sostituzione degli argomenti equivalenti.

Quindi

$$e^z=-2i\iff z=\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Applicazione della relazione $e^z = w \iff z = \ln|w| + i \arg w$.
Sostituzione $|-2i| = 2$ e $\arg(-2i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Pertanto

$$\boxed{z = \ln 2 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.3.1

Soluzione esercizio 2.3.3 Risolvere in $\mathbb{C}$

$$z^3 = -8i.$$

Soluzione.

Calcoliamo il modulo:

$$|-8i| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8.$$

Sostituzione $a = 0$, $b = -8$ nella formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$e^{i\pi/2} = i, \qquad -i = e^{-i\pi/2}.$$

Formula di Eulero.

Allora

$$-8i = 8e^{-i\pi/2}.$$

Sostituzione. $-i = e^{-i\pi/2}$.

Tutti gli argomenti di $-8i$ sono

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituzione degli argomenti equivalenti.

Le radici cubiche sono

$$z_k = 8^{1/3} e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)/3} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Formula di De Moivre.
Sostituzione $|-8i| = 8$ e $\arg(-8i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Calcoliamo i tre valori.

$$z_0 = 2e^{-i\pi/6} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i.$$

Formula di Eulero.

$$z_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i.$$

Sostituzione. $e^{i\pi/2} = i$.

$$z_2 = 2e^{i7\pi/6} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i.$$

Formula di Eulero.

Pertanto

$$\boxed{z \in \{\sqrt{3} - i,\ 2i,\ -\sqrt{3} - i\}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.3.3

Soluzione esercizio 2.3.5 Determinare tutte le soluzioni di

$$e^{iz} = 3.$$

Soluzione.

Scriviamo il secondo membro in forma esponenziale:

$$3 = 3e^{i2k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituzione degli argomenti equivalenti del numero reale positivo 3.

Applicando il logaritmo complesso:

$$e^{iz} = 3 \iff iz = \ln 3 + i2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Applicazione della relazione $e^w = 3 \iff w = \ln 3 + i2k\pi$, con $w = iz$.

Dividiamo per i:

$$iz = \ln 3 + i2k\pi \iff z = \frac{\ln 3}{i} + 2k\pi = -i\ln 3 + 2k\pi.$$

Equazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per i.

Sostituzione. $\dfrac{1}{i} = -i$.

Pertanto

$$\boxed{z = 2k\pi - i\ln 3, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.3.5

Soluzione esercizio 2.3.7 Risolvere in $\mathbb{C}$

$$z^4 = 16e^{i\pi/3}.$$

Soluzione.

Il secondo membro e' gia' in forma esponenziale:

$$16e^{i\pi/3}.$$

Il suo modulo e'

$$|16e^{i\pi/3}| = 16|e^{i\pi/3}| = 16.$$

Sostituzione. $|e^{i\pi/3}| = 1$.

Tutti gli argomenti sono

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituzione degli argomenti equivalenti.

Le radici quarte sono

$$z_k = 16^{1/4} e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)/4} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Formula di De Moivre.

Sostituzione $|16e^{i\pi/3}| = 16$ e $\arg(16e^{i\pi/3}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Pertanto

$$\boxed{z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.3.7

2.5.3 Equazioni trigonometriche complesse

Soluzione esercizio 2.4.1 Esprimere

$$\sin(iz), \qquad \cos(iz), \qquad \sinh(iz), \qquad \cosh(iz)$$

in termini di funzioni trigonometriche o iperboliche di z.

Soluzione.

Per il seno:

$$\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \sinh z.$$

Sostituzione. $i(iz) = -z$ e $-i(iz) = z$.

Sostituzione. $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Per il coseno:

$$\cos(iz) = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z.$$

Sostituzione. $i(iz) = -z$ e $-i(iz) = z$.

Sostituzione. $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$.

Per il seno iperbolico:

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z.$$

Sostituzione. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Per il coseno iperbolico:

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Sostituzione. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Quindi

$$\boxed{\sin(iz) = i \sinh z, \qquad \cos(iz) = \cosh z, \qquad \sinh(iz) = i \sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.4.1

Soluzione esercizio 2.4.3 Sapendo che $z_0 = \dfrac{\pi}{6} - i$ e' una soluzione di

$$\cos z = w,$$

scrivere tutte le soluzioni dell'equazione.

Soluzione.

Poiche' $z_0 = \dfrac{\pi}{6} - i$ e' una soluzione,

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right).$$

Sostituzione. $z_0 = \dfrac{\pi}{6} - i$.

Per il coseno vale

$$\cos z = w \iff z = \pm z_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Simmetria e periodicita' del coseno.

Quindi

$$z = \pm\left(\frac{\pi}{6} - i\right) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituzione. $z_0 = \dfrac{\pi}{6} - i$.

Pertanto le soluzioni sono

$$\boxed{z = \frac{\pi}{6} - i + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad z = -\frac{\pi}{6} + i + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.4.3

Soluzione esercizio 2.4.5 Risolvere in $\mathbb{C}$

$$\cos z = 0.$$

Soluzione.

Poniamo

$$u = e^{iz}.$$

Allora

$$\cos z = 0 \iff \frac{u + u^{-1}}{2} = 0 \iff u^2 + 1 = 0.$$

Sostituzione. $u = e^{iz}$.
Equazione. Moltiplicazione per $2u$, con $u \neq 0$.

Quindi

$$u^2 = -1 \iff u = i \quad \text{oppure} \quad u = -i.$$

Risoluzione dell'equazione quadratica.

Primo caso:

$$e^{iz} = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \iff iz = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Sostituzione. $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$.
Equazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per i.

Secondo caso:

$$e^{iz} = -i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \iff iz = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \iff z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Sostituzione. $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$.
Equazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per i.

Le due famiglie si possono raccogliere in

$$\boxed{z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 2.4.5

Soluzione esercizio 2.4.7 Risolvere in $\mathbb{C}$

$$\cos z = i.$$

Soluzione.

Poniamo

$$u = e^{iz}.$$

Allora

$$\cos z = i \iff \frac{u + u^{-1}}{2} = i \iff u^2 - 2iu + 1 = 0.$$

Sostituzione. $u = e^{iz}$.
Equazione. Moltiplicazione per $2u$, con $u \neq 0$.

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$u = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-8}}{2} = i(1 \pm \sqrt{2}).$$

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado.
Sostituzione. $(-2i)^2 - 4 = -8$ e $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}\,i$.
Quindi

$$e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) \quad \text{oppure} \quad e^{iz} = i(1-\sqrt{2}).$$

Sostituzione. $u = e^{iz}$.
Primo caso:

$$i(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Sostituzione. $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$.
Dunque

$$e^{iz} = i(1+\sqrt{2}) \iff iz = \ln(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \iff z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(1+\sqrt{2}).$$

Applicazione della relazione $e^w = \rho e^{i\theta} \iff w = \ln\rho + i\theta$.
Equazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per i.
Sostituzione. $\dfrac{1}{i} = -i$.
Secondo caso:

$$i(1-\sqrt{2}) = -i(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Sostituzione. $1-\sqrt{2} = -(\sqrt{2}-1)$.
Sostituzione. $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$.
Dunque

$$e^{iz} = i(1-\sqrt{2}) \iff iz = \ln(\sqrt{2}-1) + i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \iff z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1).$$

Applicazione della relazione $e^w = \rho e^{i\theta} \iff w = \ln\rho + i\theta$.
Equazione. Proprieta' invariantiva della divisione: divisione per i.
Sostituzione. $\dfrac{1}{i} = -i$.
Poiche'

$$\ln(\sqrt{2}-1) = -\ln(1+\sqrt{2}),$$

la seconda famiglia diventa

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(1+\sqrt{2}).$$

Sostituzione. $\ln(\sqrt{2}-1) = -\ln(1+\sqrt{2})$.
Pertanto

$$\boxed{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(1+\sqrt{2}) \quad \text{oppure} \quad z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(1+\sqrt{2}), \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Risultato.
Torna all'esercizio 2.4.7

3 Residui

3.1 Metodi per il calcolo dei residui

Il residuo di una funzione f in una singolarita' isolata z_0 e' il coefficiente del termine $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Per calcolarlo si sceglie il metodo piu' rapido in base al tipo di singolarita'.

1. **Coefficiente dello sviluppo di Laurent.** Si sviluppa la funzione in potenze di $z - z_0$ e si legge il coefficiente del termine $(z - z_0)^{-1}$.

   Esempio:
$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots .$$
   Quindi
$$\operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = 1.$$

2. **Polo semplice.** Se z_0 e' un polo semplice, allora
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

   Esempio:
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}.$$
   Nel punto $z_0 = 1$,
$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}.$$

3. **Quoziente con zero semplice al denominatore.** Se
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z_0) = 0, \qquad h'(z_0) \neq 0, \qquad g(z_0) \neq 0,$$
   allora z_0 e' un polo semplice e
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

   Esempio:
$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+4}, \qquad z_0 = 2i.$$
   Qui $g(z) = z^2 + 1$, $h(z) = z^2 + 4$, quindi
$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{(2i)^2+1}{2(2i)} = \frac{-3}{4i} = \frac{3i}{4}.$$

4. **Polo di ordine m.** Se z_0 e' un polo di ordine m, allora
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \, \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]\bigg|_{z=z_0}.$$

   Esempio:
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2}.$$
   Il punto $z_0 = i$ e' un polo doppio, dunque
$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{e^z}{(z-i)^2}\right]\bigg|_{z=i} = e^i.$$

5. **Sviluppi notevoli.** Quando la funzione contiene esponenziale, seno, coseno o logaritmo, spesso conviene usare gli sviluppi di Taylor noti.

   Esempio:
$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}.$$
   Poiche'
$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + O(z^6),$$

si ha

$$\frac{1-\cos z}{z^3} = \frac{1}{2z} - \frac{z}{24} + O(z^3).$$

Quindi

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1-\cos z}{z^3}, 0\right) = \frac{1}{2}.$$

6. **Singolarita' eliminabile.** Se dopo la semplificazione o lo sviluppo non compare il termine $(z-z_0)^{-1}$, il residuo e' nullo.

   Esempio:

   $$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

   Poiche'

   $$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

   segue

   $$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots.$$

   Quindi

   $$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z - 1}{z}, 0\right) = 0.$$

7. **Funzioni trigonometriche al denominatore.** Se il denominatore ha uno zero semplice, si usa ancora la formula $\operatorname{Res}(g/h, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.

   Esempio:

   $$f(z) = \frac{1}{\sin z}, \qquad z_0 = 0.$$

   Qui $g(z) = 1$, $h(z) = \sin z$, $h'(z) = \cos z$, dunque

   $$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

8. **Derivata logaritmica.** Se F e' meromorfa, allora $\dfrac{F'}{F}$ ha residuo uguale all'ordine dello zero e opposto all'ordine del polo.

   Esempio:

   $$F(z) = \frac{(z-1)^3}{(z+2)^2}.$$

   Allora

   $$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{3}{z-1} - \frac{2}{z+2}.$$

   Quindi

   $$\operatorname{Res}\left(\frac{F'}{F}, 1\right) = 3, \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{F'}{F}, -2\right) = -2.$$

9. **Residuo all'infinito.** Per una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann vale

   $$\sum_{z_j \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}(f, z_j) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

   Questo metodo e' utile quando e' piu' semplice calcolare tutti i residui tranne uno.

   Esempio:

   $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Poiche' $f(z) = O(1/z^2)$ per $z \to \infty$, si ha

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

Inoltre

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Dalla somma dei residui segue

$$\mathrm{Res}(f, 2) = 1.$$

3.2 Esercizi sul calcolo dei residui

Gli esercizi seguenti servono a riconoscere il tipo di singolarita' e a calcolare il residuo nel punto indicato. Quando il polo e' semplice conviene usare direttamente la formula

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Quando il polo ha ordine maggiore, si puo' usare lo sviluppo in serie oppure la formula per i poli multipli.

1. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$
nel punto $z_0 = 1$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.1

2. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+4}$$
nei punti $z_0 = 2i$ e $z_0 = -2i$.

3. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2}$$
nel punto $z_0 = i$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.3

4. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}$$
nel punto $z_0 = 1$.

5. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$
nel punto $z_0 = 0$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.5

6. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$
nel punto $z_0 = 0$.

7. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$
nel punto $z_0 = 0$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.7

8. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \cot z$$
nel punto $z_0 = 0$.
9. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \tan z$$
nel punto $z_0 = \frac{\pi}{2}$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.9
10. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^2 + 3z + 1}{(z-2)^3}$$
nel punto $z_0 = 2$.
11. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3(z-2)}$$
nel punto $z_0 = 0$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.11
12. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^3}$$
nel punto $z_0 = 0$.
13. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$
nel punto $z_0 = 0$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.13
14. Calcolare il residuo di
$$f(z) = e^{1/z}$$
nel punto $z_0 = 0$.
15. Calcolare il residuo di
$$f(z) = ze^{1/z}$$
nel punto $z_0 = 0$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.15
16. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$$
nel punto $z_0 = \pi$.
17. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-3)}$$
nel punto $z_0 = -1$.
Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.17
18. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z^2+1)^2}$$
nel punto $z_0 = i$.

19. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$
in tutti i suoi poli.

Vai alla soluzione dell'esercizio 3.2.19

20. Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}$$
nel polo appartenente al semipiano superiore.

3.3 Soluzioni degli esercizi

3.3.1 Esercizi sul calcolo dei residui

Soluzione esercizio 3.2.1 Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$
nel punto $z_0 = 1$.

Soluzione.

Il punto $z_0 = 1$ e' un polo semplice, perche' il fattore $z - 1$ compare al primo ordine e l'altro fattore non si annulla in $z = 1$.

Metodo: formula del residuo per polo semplice.
$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \left. \frac{1}{z+2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}.$$
Prima uguaglianza. Residuo: polo semplice.
Seconda uguaglianza. Semplificazione del fattore $z - 1$.
Terza uguaglianza. Sostituzione $z = 1$.

Risultato.
$$\boxed{\mathrm{Res}(f, 1) = \frac{1}{3}}.$$

Torna all'esercizio 3.2.1

Soluzione esercizio 3.2.3 Calcolare il residuo di
$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^2}$$
nel punto $z_0 = i$.

Soluzione.

Il punto $z_0 = i$ e' un polo di ordine 2.

Metodo: formula del residuo per polo doppio.
$$\mathrm{Res}(f, i) = \left. \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{e^z}{(z-i)^2} \right] \right|_{z=i} = \left. \frac{d}{dz} e^z \right|_{z=i} = e^i.$$
Prima uguaglianza. Formula del residuo per polo di ordine 2.
Seconda uguaglianza. Semplificazione del fattore $(z - i)^2$.
Terza uguaglianza. Sostituzione $z = i$.

Risultato.
$$\boxed{\mathrm{Res}(f, i) = e^i}.$$

Torna all'esercizio 3.2.3

Soluzione esercizio 3.2.5 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzione.

Metodo: sviluppo di Laurent in 0. Il residuo e' il coefficiente del termine z^{-1}.

Usiamo lo sviluppo di Taylor del coseno in 0:

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + O(z^6).$$

Sviluppo di Taylor in 0.

Dividendo per z^3, otteniamo lo sviluppo di Laurent:

$$\frac{1 - \cos z}{z^3} = \frac{1}{2z} - \frac{z}{24} + O(z^3).$$

Sviluppo di Laurent in 0.

Il coefficiente di z^{-1} e' $\frac{1}{2}$. Quindi

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{1 - \cos z}{z^3}, 0\right) = \frac{1}{2}}.$$

Definizione di residuo: Calcolo tramite sviluppo in serie di Laurent.

Torna all'esercizio 3.2.5

Soluzione esercizio 3.2.7 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzione.

Scriviamo f come quoziente

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad g(z) = 1, \qquad h(z) = \sin z.$$

Il denominatore ha uno zero semplice in 0, perche'

$$h(0) = 0, \qquad h'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

Metodo: regola del quoziente con zero semplice al denominatore.

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Prima uguaglianza. Regola del quoziente con zero semplice al denominatore per il calcolo dei residui.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $g(0) = 1$ e $h'(0) = \cos 0$.

Risultato.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, 0) = 1}.$$

Torna all'esercizio 3.2.7

Soluzione esercizio 3.2.9 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \tan z$$

nel punto $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Soluzione.

Scriviamo

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Nel punto $z_0 = \frac{\pi}{2}$, il denominatore ha uno zero semplice:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad (\cos z)'\big|_{z=\pi/2} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \neq 0.$$

Metodo: regola del quoziente con zero semplice al denominatore.

$$\operatorname{Res}\left(\tan z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi/2)}{(\cos z)'\big|_{z=\pi/2}} = \frac{1}{-\sin(\pi/2)} = -1.$$

Prima uguaglianza. Regola del quoziente con zero semplice al denominatore per il calcolo dei residui.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $(\cos z)' = -\sin z$.

Risultato.

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\tan z, \frac{\pi}{2}\right) = -1}.$$

Torna all'esercizio 3.2.9

Soluzione esercizio 3.2.11 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3(z-2)}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzione.

Il punto $z_0 = 0$ e' un polo di ordine 3, perche' z^2+1 non si annulla in 0 e $z-2$ non si annulla in 0.
Metodo: sviluppo di Laurent in 0. Scriviamo prima il fattore regolare:

$$\frac{z^2+1}{z-2} = -\frac{1}{2}(1+z^2)\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}(1+z^2)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+O(z^3)\right) = -\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\frac{5z^2}{8}+O(z^3).$$

Prima uguaglianza. Riduzione al modello geometrico $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$.
Seconda uguaglianza. Sviluppo di Taylor in 0 di $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$.

Quindi

$$\frac{z^2+1}{z^3(z-2)} = -\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{4z^2}-\frac{5}{8z}+O(1).$$

Sviluppo di Laurent in 0.

Il coefficiente di z^{-1} e' $-\frac{5}{8}$. Pertanto

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+1}{z^3(z-2)}, 0\right) = -\frac{5}{8}}.$$

Definizione di residuo: Calcolo tramite sviluppo in serie di Laurent.

Torna all'esercizio 3.2.11

Soluzione esercizio 3.2.13 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzione.

Metodo: sviluppo di Taylor del denominatore in 0.

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + O(z^3) = z\left(1 + \frac{z}{2} + O(z^2)\right).$$

Sviluppo di Taylor in 0.

Quindi

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + O(z^2)} = 1 - \frac{z}{2} + O(z^2).$$

Sviluppo di Taylor in 0.

La singolarita' in 0 e' eliminabile e nello sviluppo non compare il termine z^{-1}. Dunque

$$\boxed{\mathrm{Res}\left(\frac{z}{e^z - 1}, 0\right) = 0}.$$

Definizione di residuo: Calcolo tramite sviluppo in serie di Laurent.

Torna all'esercizio 3.2.13

Soluzione esercizio 3.2.15 Calcolare il residuo di

$$f(z) = ze^{1/z}$$

nel punto $z_0 = 0$.

Soluzione.

Metodo: sviluppo di Laurent in 0.

$$ze^{1/z} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{1-n}}{n!}.$$

Prima uguaglianza. Sviluppo di Laurent in 0 di $e^{1/z}$.

Il termine z^{-1} si ottiene quando

$$1 - n = -1 \iff n = 2.$$

Per $n = 2$, il coefficiente e' $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\boxed{\mathrm{Res}\left(ze^{1/z}, 0\right) = \frac{1}{2}}.$$

Definizione di residuo: Calcolo tramite sviluppo in serie di Laurent.

Torna all'esercizio 3.2.15

Soluzione esercizio 3.2.17 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-3)}$$

nel punto $z_0 = -1$.

Soluzione.

Il punto $z_0 = -1$ e' un polo di ordine 2.

Metodo: formula del residuo per polo doppio.

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 \frac{e^{2z}}{(z+1)^2(z-3)}\right]\Bigg|_{z=-1} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{z-3}\right)\Bigg|_{z=-1} = \frac{e^{2z}(2z-7)}{(z-3)^2}\Bigg|_{z=-1} = -\frac{9}{16e^2}.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per polo di ordine 2.
Seconda uguaglianza. Semplificazione del fattore $(z+1)^2$.
Terza uguaglianza. Derivata di $\frac{e^{2z}}{z-3}$.
Quarta uguaglianza. Sostituzione $z=-1$.

Risultato.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,-1) = -\frac{9}{16e^2}}.$$

Torna all'esercizio 3.2.17

Soluzione esercizio 3.2.19 Calcolare il residuo di

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

in tutti i suoi poli.

Soluzione.

I poli sono gli zeri del denominatore:

$$z^4+1=0 \iff z^4=-1 \iff z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Terza equivalenza. Formula di De Moivre applicata a $-1=e^{i(\pi+2k\pi)}$.

Tutti i poli sono semplici, perche' se $h(z)=z^4+1$, allora

$$h'(z_k) = 4z_k^3 \neq 0.$$

Metodo: regola del quoziente con zero semplice al denominatore.

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = \frac{1}{h'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Prima uguaglianza. Regola del quoziente con zero semplice al denominatore per il calcolo dei residui.

Risultato. Scrivendo esplicitamente i quattro valori:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f,e^{i\pi/4}\right) &= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}},\\
\operatorname{Res}\left(f,e^{i3\pi/4}\right) &= \frac{1-i}{4\sqrt{2}},\\
\operatorname{Res}\left(f,e^{i5\pi/4}\right) &= \frac{1+i}{4\sqrt{2}},\\
\operatorname{Res}\left(f,e^{i7\pi/4}\right) &= \frac{-1+i}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Valori ottenuti dalla formula $\operatorname{Res}(f,z_k)=\frac{1}{4z_k^3}$.

Torna all'esercizio 3.2.19

4 Serie di potenze, Taylor e Laurent

4.1 Introduzione

Le serie di potenze, gli sviluppi di Taylor e gli sviluppi di Laurent sono strumenti centrali in analisi complessa. Servono a descrivere localmente una funzione olomorfa o meromorfa, a classificare singolarita', a calcolare residui e a studiare insiemi di convergenza.

In queste note distinguiamo alcune famiglie di esercizi ricorrenti:

1. determinare l'insieme di convergenza di una serie complessa;
2. sviluppare una funzione in serie di Taylor;
3. sviluppare una funzione in serie di Laurent in una singolarita' finita;
4. classificare singolarita' e calcolare residui tramite Laurent;
5. studiare la singolarita' all'infinito;
6. rispondere a domande teoriche o miste su Taylor, Laurent e residui.

La classificazione non e' rigida: molti esercizi combinano piu' aspetti. Per esempio, un esercizio su una singolarita' essenziale puo' richiedere sia lo sviluppo di Laurent sia il calcolo del residuo.

4.2 Insiemi di convergenza di serie complesse

Gli esercizi di questa categoria chiedono di determinare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ per cui converge una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \Phi(z)^n.$$

La funzione Φ puo' essere un quoziente lineare, un quoziente quadratico, un'espressione con $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, oppure un'espressione esponenziale.

Metodo.

1. **Isolare il termine elevato a n.** Si riscrive la serie nella forma
$$\sum a_n w(z)^n.$$
A questo punto $w(z)$ e' la nuova variabile effettiva.
2. **Determinare il raggio nella variabile w.** Si studia la serie numerica
$$\sum a_n w^n$$
con il criterio della radice o del rapporto. Si ottiene una condizione del tipo
$$|w| < R.$$
3. **Tradurre la condizione su z.** Si sostituisce $w = w(z)$. Per esempio
$$\left| \frac{z-a}{z-b} \right| < R$$
descrive una regione del piano, spesso un disco o un semipiano.
4. **Studiare i punti esclusi.** Se $w(z)$ contiene un denominatore, i punti in cui il denominatore si annulla vanno esclusi dal dominio della serie.
5. **Studiare il bordo.** Sul bordo $|w(z)| = R$ il criterio della radice non decide. Si torna alla serie originaria e si studia
$$\sum a_n w(z)^n$$
usando convergenza assoluta, convergenza semplice, criterio di Dirichlet, confronto o serie note.
6. **Decidere se l'insieme e' aperto o chiuso.** Dopo aver incluso o escluso i punti del bordo, si conclude se l'insieme di convergenza e' aperto, chiuso, oppure nessuno dei due.

Esercizi.

1. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.1

2. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2},$$
studiando anche il comportamento sul bordo.

3. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2(z+2i)^n.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.3

4. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}(z-3)^n,$$
senza trascurare il bordo.

5. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z+i}{3}\right)^n.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.5

6. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{z-2}{2}\right)^n,$$
studiando anche il comportamento sul bordo.

7. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^n,$$
studiando anche il comportamento sul bordo.
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.7

8. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2+3n}\left(\frac{z+2i}{z-1}\right)^n$$
e precisare se e' aperto o chiuso.

9. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \left(\frac{z+4}{z-2i} \right)^n,$$
senza trascurare il bordo.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.9

10. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n+2} \left(\frac{z^2+1}{z^2-3i} \right)^n.$$

11. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{z-3}{z+2i} \right)^n.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.11

12. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n(z^2-2iz-1)}}{(n+1)^2}.$$

13. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n(3iz-2)}}{n}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.13

14. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2+1} \left(\frac{z}{12+2i \operatorname{Re} z} \right)^n.$$

15. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+2)} \left(\frac{z+i}{\bar{z}-2} \right)^n.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.15

16. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} \left(2 \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z\right)^n.$$

17. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n^4+2} \left(\frac{z^2-2}{z^2+5i} \right)^n$$
e stabilire se l'insieme e' aperto o chiuso.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.2.17

18. Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sin^2 n} \left(\frac{z-1-i}{z+2} \right)^n,$$
studiando il bordo.

4.3 Sviluppi di Taylor e coefficienti

In questa categoria si chiede lo sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa in un intorno di un punto, quasi sempre $z = 0$, e talvolta il valore di un coefficiente specifico.

Metodo.

1. **Individuare il centro dello sviluppo.** Se il centro e' z_0, si lavora con la variabile $z - z_0$.
2. **Trovare le singolarita' piu' vicine.** Il raggio di convergenza dello sviluppo di Taylor e' la distanza dal centro alla singolarita' piu' vicina della funzione.
3. **Scomporre la funzione.** Per funzioni razionali si usano fratti semplici. Per prodotti con funzioni intere si sviluppa la parte intera e si moltiplica con la serie razionale.
4. **Usare serie notevoli.** Si richiamano gli sviluppi di
$$\frac{1}{1-z}, \quad e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \log(1+z).$$
5. **Determinare il coefficiente richiesto.** Se serve solo c_n, non e' necessario scrivere tutta la serie: si identificano solo i termini che producono la potenza z^n.
6. **Indicare il disco di convergenza.** Lo sviluppo va accompagnato dalla condizione
$$|z - z_0| < R.$$

Esercizi.

1. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione
$$f(z) = \frac{1}{(3-z)(z+2)}$$
e determinarne il raggio di convergenza.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 4.3.1

2. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione
$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)(z+4)}$$
e calcolare il coefficiente c_5.

3. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione
$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{1-2z}$$
e calcolare il coefficiente c_6.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 4.3.3

4. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione
$$f(z) = \frac{\cos(2z)}{1+z^2}$$
precisando il disco di convergenza.

5. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione

$$f(z)=\frac{\log(1+3z)}{z(1-z)}$$

e calcolare il coefficiente c_4.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.3.5

6. Determinare il coefficiente c_7 dello sviluppo di Taylor in 0 della funzione

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(1-z^2)}.$$

7. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0

$$f(z)=\frac{1}{z^2-2z+2}$$

e precisare il raggio di convergenza.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.3.7

8. Determinare una formula per il coefficiente c_n dello sviluppo di Taylor in 0 della funzione

$$f(z)=\frac{1}{(1-3z)(1+z)}.$$

9. Sviluppare in serie di Taylor centrata in 1 la funzione

$$f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$$

e precisare il raggio di convergenza.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.3.9

4.4 Sviluppi di Laurent in singolarita' finite

Gli sviluppi di Laurent descrivono una funzione olomorfa in una corona

$$r<|z-z_0|<R.$$

Sono necessari quando il punto z_0 e' una singolarita' isolata oppure quando si sviluppa una funzione in una corona che esclude qualche singolarita'.

La differenza rispetto allo sviluppo di Taylor e' strutturale. Uno sviluppo di Taylor centrato in z_0 usa solo potenze non negative:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

Questo e' possibile quando la funzione e' olomorfa in un disco centrato in z_0. In particolare, il centro appartiene al dominio di olomorfia della funzione.

Uno sviluppo di Laurent, invece, puo' contenere anche potenze negative:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

La parte con $n<0$ si chiama parte principale. Essa misura il comportamento della funzione vicino al centro z_0, quando z_0 non e' necessariamente un punto regolare della funzione. Per questo motivo Laurent si usa su corone forate, non necessariamente su dischi pieni.

In pratica:

$$\begin{aligned}
\text{Taylor} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{funzione olomorfa nel centro e solo potenze } (z-z_0)^n,\ n\geq 0,\\
\text{Laurent} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{funzione olomorfa in una corona e possibili potenze negative.}
\end{aligned}$$

Metodo.

1. **Individuare il centro e le singolarita'.** Si fissano z_0 e le singolarita' della funzione. Le distanze da z_0 determinano i possibili dischi e le possibili corone.
2. **Scegliere la corona richiesta.** Lo stesso termine razionale puo' avere sviluppi diversi in corone diverse, per esempio $|z| < 1$ oppure $|z| > 1$.
3. **Usare serie geometriche.** Ogni fattore del tipo $\dfrac{1}{z-a}$ si riscrive in modo compatibile con la corona scelta.
4. **Sviluppare la parte intera.** Esponenziali, seni, coseni e logaritmi si sviluppano con le serie note. Se compaiono $1/(z-z_0)$ o $1/(z-z_0)^2$, possono generare parte principale infinita.
5. **Leggere il tipo di singolarita'.** Se la parte principale e' nulla, la singolarita' e' eliminabile. Se ha un numero finito di termini, e' un polo. Se ha infiniti termini, e' essenziale.
6. **Indicare la regione di convergenza.** Ogni sviluppo di Laurent deve essere accompagnato dalla corona in cui vale.

Esercizi.

1. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-3}$$

nella corona $0 < |z| < 3$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.4.1

2. Scrivere la parte principale dello sviluppo di Laurent in $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)^3(z+2)}.$$

3. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 di

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^5}$$

e classificare la singolarita' in 0.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.4.3

4. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 1 della funzione

$$f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{z+3}$$

nella corona $0 < |z-1| < 4$.

5. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-4)}$$

per $0 < |z| < 4$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.4.5

6. Scrivere gli sviluppi di Laurent centrati in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-5)}$$

nelle corone $0 < |z| < 2$, $2 < |z| < 5$ e $|z| > 5$.

7. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z^2 - 4}$$

nella corona $0 < |z| < 2$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.4.7

8. Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in $2i$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2i)^2(z+1)}$$

e calcolare il coefficiente di $(z-2i)^{-1}$.

4.5 Singolarita' e residui tramite sviluppi

Questa categoria combina classificazione delle singolarita', calcolo dei residui e sviluppo di Laurent. Molti esercizi hanno singolarita' finite semplici o multiple e una singolarita' essenziale in 0.

Metodo.

1. **Elencare le singolarita' finite.** Si trovano gli zeri del denominatore e i punti in cui compaiono termini come $e^{1/z}$, $\sin(1/z)$, $\cos(1/z)$.

2. **Classificare ogni singolarita'.** Un fattore razionale produce poli, salvo cancellazioni. Un termine come $e^{1/(z-z_0)}$ o $\cos(1/(z-z_0))$ produce una singolarita' essenziale.

3. **Calcolare i residui nei poli.** Per poli semplici si usa

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Per poli multipli si usa la formula con derivata.

4. **Calcolare i residui nelle essenziali.** Si sviluppa in Laurent e si legge il coefficiente di $(z-z_0)^{-1}$.

5. **Usare la somma dei residui quando conviene.** Se la funzione e' meromorfa sulla sfera di Riemann, allora

$$\sum_{z_j \in \mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, z_j) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

6. **Scrivere lo sviluppo richiesto.** Quando l'esercizio chiede uno sviluppo, si precisa anche la corona di convergenza.

Esercizi.

1. Si consideri

$$f(z) = \frac{z\, e^{3/z}}{(z-2)(z+3i)}.$$

Determinare le singolarita' finite, classificarle, calcolare i residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 0$.

Vai alla soluzione dell'esercizio 4.5.1

2. Si consideri
$$f(z) = \frac{z^2(e^{2/z} - 1)}{(z+2)(z-3i)}.$$
Determinare le singolarita', classificarle e calcolare i residui.

3. Si consideri
$$f(z) = \frac{(z+1)\cosh(3/z)}{(z-2)(z+5)}.$$
Determinare le singolarita' finite, classificarle e calcolare i relativi residui.
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.5.3

4. Si consideri
$$f(z) = \frac{\sin(2z^2)}{z^3(z-4)}.$$
Classificare la singolarita' in 0 e calcolare tutti i residui finiti.

5. Si consideri
$$f(z) = \frac{e^{-2/z^2}}{(z^2-4)(z-3i)}.$$
Determinare le singolarita', classificarle e calcolare i residui.
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.5.5

6. Si consideri
$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - 8} + e^{2/z}.$$
Determinare le singolarita' finite, classificarle e calcolare i residui.

7. Si consideri
$$f(z) = \frac{z^2 \sin(1/z)}{(z-1)^2}.$$
Determinare le singolarita', classificarle e scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0, precisandone la corona di convergenza.
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.5.7

8. Si consideri
$$f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{z^2+4}.$$
Determinare le singolarita', classificarle e calcolare i residui.

4.6 Singolarita' all'infinito

La singolarita' all'infinito si studia mediante il cambio
$$w = \frac{1}{z}.$$
La funzione f ha in ∞ lo stesso tipo di comportamento che
$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$$
ha in $w = 0$. Per il residuo all'infinito si usa
$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

Metodo.

1. **Sostituire $z = 1/w$.** Si studia $f(1/w)$ per $w \to 0$.
2. **Classificare $w = 0$.** Se $f(1/w)$ e' olomorfa in 0, allora ∞ e' eliminabile. Se ha un polo in 0, allora ∞ e' un polo. Se ha una singolarita' essenziale in 0, allora ∞ e' essenziale.
3. **Calcolare il residuo all'infinito.** Si puo' usare la formula con il cambio $w = 1/z$, oppure
$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\sum_{z_j \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}(f, z_j).$$
4. **Scrivere lo sviluppo relativo a ∞.** Lo sviluppo si scrive in potenze di $1/z$, valido per $|z|$ grande abbastanza.

Esercizi.

1. Classificare la singolarita' all'infinito e calcolare il residuo all'infinito della funzione
$$f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)(z+2)^2}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.6.1
2. Classificare $z = \infty$ per
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 4}.$$
3. Classificare $z = \infty$ e calcolare il residuo all'infinito di
$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{z(z-2)(z+1)}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.6.3
4. Scrivere lo sviluppo relativo a $z = \infty$ della funzione
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$
nella regione $|z| > 2$.
5. Classificare la singolarita' all'infinito della funzione
$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)\cos(\pi z)}{z^2 + 9}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.6.5
6. Calcolare il residuo all'infinito di
$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2(z-3)^2}.$$
7. Studiare $z = \infty$ per
$$f(z) = \frac{\sin(2/z)}{z - 1}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 4.6.7
8. Scrivere lo sviluppo relativo a $z = \infty$, centrato in potenze di $1/z$, della funzione
$$f(z) = \frac{3z^2 - 1}{z^2 + 4}.$$

4.7 Esercizi misti e domande teoriche

Questa categoria raccoglie esercizi in cui non e' richiesto solo un calcolo, ma anche il riconoscimento del teorema corretto da usare.

Metodo.

1. **Identificare il tema principale.** Si decide se l'esercizio riguarda convergenza, Taylor, Laurent, residui, infinito o teorema dei residui.
2. **Scrivere le ipotesi del teorema.** Per Taylor e Laurent bisogna indicare il dominio di olomorfia. Per il teorema dei residui bisogna controllare quali singolarita' sono interne al contorno.
3. **Ridurre al coefficiente giusto.** Se si chiede un residuo, si cerca il coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$. Se si chiede un coefficiente di Taylor, si cerca il coefficiente di $(z - z_0)^n$.
4. **Usare la teoria per evitare calcoli inutili.** Parita', simmetrie, somma dei residui e raggio di convergenza permettono spesso di concludere senza espandere tutto.
5. **Concludere in modo esplicito.** La risposta deve dire chiaramente il tipo di singolarita', la regione di convergenza o il valore del residuo richiesto.

Esercizi.

1. Enunciare il teorema di Laurent e spiegare perche' la regione di convergenza di uno sviluppo di Laurent e' una corona.
2. Enunciare la relazione tra residuo e coefficiente dello sviluppo di Laurent.
3. Sia f olomorfa in $0 < |z| < 4$ e sia
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$
Esprimere
$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz$$
in funzione dei coefficienti a_n.
4. Usando il teorema dei residui, calcolare
$$\int_{|z|=3} \frac{e^{1/z}}{z-2}\, dz.$$
5. Stabilire se puo' esistere una funzione olomorfa in $|z| < 2$ il cui sviluppo di Taylor centrato in 0 abbia raggio di convergenza 1.
6. Sia
$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}.$$
Classificare la singolarita' in 0 e calcolare il residuo.
7. Sia f meromorfa sulla sfera di Riemann e siano noti tutti i residui finiti tranne uno. Spiegare come ricavare il residuo mancante.
8. Dire se una singolarita' essenziale puo' avere residuo nullo, motivando la risposta con un esempio.

4.8 Soluzioni degli esercizi

4.8.1 Insiemi di convergenza di serie complesse

Soluzione esercizio 4.2.1 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Soluzione.
Metodo: serie geometrica. La serie converge se e solo se la ragione ha modulo strettamente minore di uno:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad \text{converge} \iff |z| < 1.$$

Criterio: serie geometrica complessa.
Sul bordo $|z| = 1$, il termine generale non tende a zero, perche'

$$|z^n| = 1 \qquad \text{per ogni } n.$$

Condizione necessaria di convergenza: il termine generale deve tendere a zero.
Risultato.

$$\boxed{E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.1

Soluzione esercizio 4.2.3 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (z + 2i)^n.$$

Soluzione.
Metodo: criterio della radice. Per il termine generale si ha

$$\sqrt[n]{|n^2(z+2i)^n|} = \sqrt[n]{n^2}\,|z+2i| \longrightarrow |z+2i|.$$

Criterio della radice.
Quindi la serie converge assolutamente per

$$|z + 2i| < 1$$

e diverge per $|z + 2i| > 1$.
Sul bordo $|z + 2i| = 1$, il termine generale non tende a zero:

$$\left|n^2(z+2i)^n\right| = n^2.$$

Condizione necessaria di convergenza: il termine generale deve tendere a zero.
Risultato.

$$\boxed{E = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| < 1\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.3

Soluzione esercizio 4.2.5 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z+i}{3}\right)^n.$$

Soluzione.

Metodo: serie geometrica. La ragione e'

$$w = \frac{z+i}{3}.$$

La serie converge se e solo se $|w| < 1$, cioe'

$$\left|\frac{z+i}{3}\right| < 1 \iff |z+i| < 3.$$

Criterio: serie geometrica complessa.

Sul bordo $|z+i| = 3$, si ha $|w| = 1$, quindi il termine generale non tende a zero.

Risultato.

$$\boxed{E = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 3\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.5

Soluzione esercizio 4.2.7 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}\left(\frac{z-1}{z+3i}\right)^n,$$

studiando anche il comportamento sul bordo.

Soluzione.

Poniamo

$$w = \frac{z-1}{z+3i}.$$

La serie diventa una serie di potenze in w:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} w^n.$$

Metodo: criterio della radice nella variabile w. Poiche'

$$\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Criterio della radice.

Quindi la serie converge assolutamente per $|w| < 1$ e diverge per $|w| > 1$. Sul bordo $|w| = 1$, il termine generale non tende a zero:

$$\left|\frac{n+1}{n+2} w^n\right| = \frac{n+1}{n+2} \longrightarrow 1.$$

Bordo. Condizione necessaria di convergenza: il termine generale deve tendere a zero.

Dunque la condizione finale e' $|w| < 1$, cioe'

$$\left|\frac{z-1}{z+3i}\right| < 1 \iff |z-1| < |z+3i|.$$

Sostituzione $w = \frac{z-1}{z+3i}$.

Scrivendo $z = x + iy$, otteniamo

$$|z-1| < |z+3i| \iff (x-1)^2 + y^2 < x^2 + (y+3)^2 \iff x + 3y + 4 > 0.$$

Seconda equivalenza. Sostituzione $z = x + iy$.

Risultato.

$$\boxed{E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x + 3y + 4 > 0\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.7

Soluzione esercizio 4.2.9 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \left(\frac{z+4}{z-2i} \right)^n,$$

senza trascurare il bordo.

Soluzione.

Poniamo

$$w = \frac{z+4}{z-2i}.$$

La serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^n}{n \log^2 n}.$$

Metodo: criterio della radice nella variabile w. Poiche'

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n \log^2 n}} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Criterio della radice.

Sul bordo $|w| = 1$, la serie converge assolutamente, perche'

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

converge. Bordo. Criterio integrale per la serie $\sum \frac{1}{n \log^2 n}$.

La condizione finale e' quindi $|w| \leq 1$:

$$\left| \frac{z+4}{z-2i} \right| \leq 1 \Longleftrightarrow |z+4| \leq |z-2i|.$$

Sostituzione $w = \frac{z+4}{z-2i}$.

Scrivendo $z = x + iy$,

$$|z+4| \leq |z-2i| \Longleftrightarrow (x+4)^2 + y^2 \leq x^2 + (y-2)^2 \Longleftrightarrow 2x + y + 3 \leq 0.$$

Seconda equivalenza. Sostituzione $z = x + iy$.

Risultato.

$$\boxed{E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 2x + y + 3 \leq 0\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.9

Soluzione esercizio 4.2.11 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{z-3}{z+2i} \right)^n.$$

Soluzione.

Poniamo

$$w = \frac{z-3}{z+2i}.$$

La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) w^n.$$

Metodo: criterio della radice. Poiche'

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}, \qquad \sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Prima relazione. Sviluppo asintotico: $\sin t \sim t$ per $t \to 0$.

Sul bordo $|w| = 1$, la serie converge assolutamente, perche'

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) w^n\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Bordo. Criterio del confronto.

La condizione finale e' $|w| \leq 1$:

$$\left|\frac{z-3}{z+2i}\right| \leq 1 \iff |z-3| \leq |z+2i|.$$

Sostituzione $w = \frac{z-3}{z+2i}$.

Scrivendo $z = x + iy$,

$$|z-3| \leq |z+2i| \iff (x-3)^2 + y^2 \leq x^2 + (y+2)^2 \iff 6x + 4y - 5 \geq 0.$$

Seconda equivalenza. Sostituzione $z = x + iy$.

Risultato.

$$\boxed{E = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 6x + 4y - 5 \geq 0\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.11

Soluzione esercizio 4.2.13 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n(3iz-2)}}{n}.$$

Soluzione.

Scriviamo la serie nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(e^{3iz-2}\right)^n.$$

Riduzione: variabile effettiva $w = e^{3iz-2}$.

Metodo: criterio della radice nella variabile w. Poiche'

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Criterio della radice.

Scrivendo $z = x + iy$,

$$|e^{3iz-2}| = \left|e^{3ix-3y-2}\right| = e^{-3y-2}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = x + iy$.

All'interno del disco di convergenza nella variabile w, cioe' per $|e^{3iz-2}| < 1$, si ottiene

$$|e^{3iz-2}| < 1 \iff e^{-3y-2} < 1 \iff -3y - 2 < 0 \iff y > -\frac{2}{3}.$$

Prima equivalenza. Sostituzione $|e^{3iz-2}| = e^{-3y-2}$.

Sul bordo $|e^{3iz-2}| = 1$, si ha $y = -\frac{2}{3}$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{3inx}}{n}.$$

Bordo. Sostituzione $z = x - \frac{2}{3}i$.

Questa serie diverge se $e^{3ix} = 1$, cioe' se

$$x = \frac{2k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

e converge per $e^{3ix} \neq 1$ per il criterio di Dirichlet. Bordo. Criterio di Dirichlet per $\sum e^{3inx}/n$.

Risultato.

$$\boxed{E = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : y > -\frac{2}{3} \right\} \cup \left\{ x - \frac{2}{3}i : x \in \mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} \right\}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.13

Soluzione esercizio 4.2.15 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log(n+2)} \left(\frac{z+i}{\bar{z}-2} \right)^n.$$

Soluzione.

Poniamo

$$w = \frac{z+i}{\bar{z}-2}.$$

La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n^2 \log(n+2)}.$$

Metodo: criterio della radice nella variabile w. Poiche'

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 \log(n+2)}} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Sul bordo $|w| = 1$, la serie converge assolutamente per confronto con $\sum 1/n^2$.

La condizione finale e' $|w| \leq 1$, cioe'

$$\left| \frac{z+i}{\bar{z}-2} \right| \leq 1 \iff |z+i| \leq |\bar{z}-2|.$$

Sostituzione $w = \frac{z+i}{\bar{z}-2}$.

Poiche' $|\bar{z}-2| = |z-2|$, scrivendo $z = x + iy$ otteniamo

$$|z+i| \leq |z-2| \iff x^2 + (y+1)^2 \leq (x-2)^2 + y^2 \iff 4x + 2y - 3 \leq 0.$$

Prima equivalenza. Sostituzione $|\bar{z}-2| = |z-2|$.
Seconda equivalenza. Sostituzione $z = x + iy$.

Risultato.

$$\boxed{E = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : 4x + 2y - 3 \leq 0 \}}.$$

Torna all'esercizio 4.2.15

Soluzione esercizio 4.2.17 Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n^4 + 2} \left(\frac{z^2 - 2}{z^2 + 5i} \right)^n$$

e stabilire se l'insieme e' aperto o chiuso.

Soluzione.

Scriviamo la serie nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4+2}\left(3\frac{z^2-2}{z^2+5i}\right)^n .$$

Riduzione: variabile effettiva $w = 3\frac{z^2-2}{z^2+5i}$.

Metodo: criterio della radice nella variabile w. Poiche'

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^4+2}} \longrightarrow 1,$$

il raggio di convergenza in w e' $R = 1$. Sul bordo $|w| = 1$, la serie converge assolutamente per confronto con $\sum 1/n^4$.

La condizione finale e'

$$\left|3\frac{z^2-2}{z^2+5i}\right| \leq 1 \iff 3|z^2-2| \leq |z^2+5i|.$$

Sostituzione $w = 3\frac{z^2-2}{z^2+5i}$.

I punti in cui $z^2+5i = 0$ non soddisfano la disuguaglianza $3|z^2-2| \leq |z^2+5i|$, quindi non vanno aggiunti separatamente.

Risultato.

$$\boxed{E = \{z \in \mathbb{C} : 3|z^2-2| \leq |z^2+5i|\}}.$$

L'insieme e' chiuso, perche' e' definito da una disuguaglianza non stretta tra funzioni continue.

Torna all'esercizio 4.2.17

4.8.2 Sviluppi di Taylor e coefficienti

Soluzione esercizio 4.3.1 Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(3-z)(z+2)}$$

e determinarne il raggio di convergenza.

Soluzione.

Metodo: fratti semplici e serie geometrica. Le singolarita' sono $z = 3$ e $z = -2$, quindi il raggio di convergenza dello sviluppo centrato in 0 e'

$$R = \min\{|3|, |-2|\} = 2.$$

Raggio di convergenza. Distanza dalla singolarita' piu' vicina al centro.

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{(3-z)(z+2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3-z} + \frac{1}{z+2}\right). \tag{1}$$

Sviluppiamo i due termini:

$$\frac{1}{3-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}, \qquad |z| < 3,$$

$$\frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \qquad |z| < 2.$$

Serie geometriche.

Usando (1), otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n, \qquad |z| < 2.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione degli sviluppi geometrici in (1).

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) z^n, \qquad R = 2}.$$

Torna all'esercizio 4.3.1

Soluzione esercizio 4.3.3 Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{1-2z}$$

e calcolare il coefficiente c_6.

Soluzione.

Metodo: prodotto tra lo sviluppo dell'esponenziale e una serie geometrica. Si ha

$$e^{z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{k!}, \qquad \frac{1}{1-2z} = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^m z^m, \qquad |z| < \frac{1}{2}.$$

Primo sviluppo. Serie di Taylor dell'esponenziale.
Secondo sviluppo. Serie geometrica.

Moltiplicando le due serie,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{2^{n-2k}}{k!}\right) z^n, \qquad |z| < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Prodotto di Cauchy.

Da (2), il coefficiente c_6 e'

$$c_6 = \sum_{k=0}^{3}\frac{2^{6-2k}}{k!} = 64 + 16 + 2 + \frac{1}{6} = \frac{493}{6}.$$

Prima uguaglianza. Formula dei coefficienti in (2) con $n = 6$.

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{2^{n-2k}}{k!}\right) z^n, \qquad |z| < \frac{1}{2}, \qquad c_6 = \frac{493}{6}}.$$

Torna all'esercizio 4.3.3

Soluzione esercizio 4.3.5 Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0 la funzione

$$f(z) = \frac{\log(1+3z)}{z(1-z)}$$

e calcolare il coefficiente c_4.

Soluzione.

In $z = 0$ la singolarita' e' eliminabile, perche'

$$\frac{\log(1+3z)}{z} \longrightarrow 3.$$

Singolarita' eliminabile.

Metodo: sviluppo del logaritmo e serie geometrica. Nel disco $|z| < \frac{1}{3}$,

$$\frac{\log(1+3z)}{z} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k}z^{k-1}, \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{m=0}^{+\infty} z^m.$$

Primo sviluppo. Serie di Taylor di $\log(1+3z)$, divisa per z.
Secondo sviluppo. Serie geometrica.

Moltiplicando le due serie,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k} \right) z^n, \qquad |z| < \frac{1}{3}. \tag{3}$$

Prodotto di Cauchy.

Da (3), il coefficiente c_4 e'

$$c_4 = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k} = 3 - \frac{9}{2} + 9 - \frac{81}{4} + \frac{243}{5} = \frac{717}{20}.$$

Prima uguaglianza. Formula dei coefficienti in (3) con $n = 4$.

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{k} \right) z^n, \qquad |z| < \frac{1}{3}, \qquad c_4 = \frac{717}{20}}.$$

Torna all'esercizio 4.3.5

Soluzione esercizio 4.3.7 Sviluppare in serie di Taylor centrata in 0

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}$$

e precisare il raggio di convergenza.

Soluzione.

Le singolarita' sono

$$z = 1 + i, \qquad z = 1 - i.$$

Entrambe hanno distanza $\sqrt{2}$ dal centro 0, quindi il raggio di convergenza e'

$$R = \sqrt{2}.$$

Raggio di convergenza. Distanza dalla singolarita' piu' vicina al centro.

Poniamo

$$a = 1 + i, \qquad b = 1 - i.$$

Allora

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right). \tag{4}$$

Per $|z| < \sqrt{2}$,

$$\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}, \qquad \frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}}.$$

Serie geometriche.

Usando (4), otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione degli sviluppi geometrici in (4).

Poiche'

$$a = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}, \qquad b = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4},$$

si ha

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4} \right).$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ e $b = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\frac{n+1}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) z^n, \qquad R = \sqrt{2}}.$$

Torna all'esercizio 4.3.7

Soluzione esercizio 4.3.9 Sviluppare in serie di Taylor centrata in 1 la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$$

e precisare il raggio di convergenza.

Soluzione.

Il centro e' $z_0 = 1$. Poniamo

$$w = z - 1.$$

Allora $z = 1 + w$ e

$$f(z) = \frac{1}{(1+w)(w-2)}.$$

Cambiamento di variabile: $w = z - 1$.

Le singolarita' in z sono 0 e 3. Le distanze dal centro 1 sono

$$|0-1| = 1, \qquad |3-1| = 2,$$

quindi il raggio di convergenza e'

$$R = 1.$$

Raggio di convergenza. Distanza dalla singolarita' piu' vicina al centro.

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{(1+w)(w-2)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+w} + \frac{1}{3}\frac{1}{w-2}. \tag{5}$$

Per $|w| < 1$,

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n w^n, \qquad \frac{1}{w-2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n.$$

Serie geometriche.

Usando (5), otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^n}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}\right)(z-1)^n, \qquad |z-1| < 1.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione degli sviluppi geometrici in (5).
Prima uguaglianza. Sostituzione $w = z - 1$.

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^n}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}\right)(z-1)^n, \qquad R = 1}.$$

Torna all'esercizio 4.3.9

4.8.3 Sviluppi di Laurent in singolarita' finite

Soluzione esercizio 4.4.1 Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-3}$$

nella corona $0 < |z| < 3$.

Soluzione.

Metodo: sviluppo dell'esponenziale e serie geometrica. Nella corona $0 < |z| < 3$ si ha

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! z^k}, \qquad \frac{1}{z-3} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{3^{m+1}}.$$

Primo sviluppo. Serie di Laurent dell'esponenziale.
Secondo sviluppo. Serie geometrica valida per $|z| < 3$.

Moltiplicando le due serie, si ottiene

$$f(z) = -\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{m-k}}{3^{m+1} k!}, \qquad 0 < |z| < 3.$$

Prima uguaglianza. Prodotto degli sviluppi precedenti.

Risultato.

$$\boxed{\frac{e^{1/z}}{z-3} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{m-k}}{3^{m+1} k!}, \qquad 0 < |z| < 3}.$$

Torna all'esercizio 4.4.1

Soluzione esercizio 4.4.3 Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 di

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^5}$$

e classificare la singolarita' in 0.

Soluzione.

Metodo: sviluppo di Taylor del seno e divisione per z^5. Si ha

$$\sin(2z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Serie di Taylor del seno.

Quindi

$$\frac{\sin(2z)}{z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-4} = \frac{2}{z^4} - \frac{4}{3z^2} + \frac{4}{15} - \frac{8}{315} z^2 + \cdots .$$

Prima uguaglianza. Divisione dello sviluppo di $\sin(2z)$ per z^5.

La parte principale ha un numero finito di termini e il termine di grado piu' basso e' $2z^{-4}$. Dunque 0 e' un polo di ordine 4.

Risultato.

$$\boxed{\frac{\sin(2z)}{z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-4}}.$$

$\boxed{\text{0 e' un polo di ordine 4.}}$

Torna all'esercizio 4.4.3

Soluzione esercizio 4.4.5 Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2(z-4)}$$

per $0 < |z| < 4$.

Soluzione.

Metodo: fratti semplici e serie geometrica. Scomponiamo:

$$\frac{z+2}{z^2(z-4)} = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{8z} + \frac{3}{8}\frac{1}{z-4}. \tag{6}$$

Nella corona $0 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

Serie geometrica valida per $|z| < 4$.

Usando (6), otteniamo

$$f(z) = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{8z} - \frac{3}{32}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n, \qquad 0 < |z| < 4.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione dello sviluppo geometrico in (6).

Risultato.

$$\boxed{\frac{z+2}{z^2(z-4)} = -\frac{1}{2z^2} - \frac{3}{8z} - \frac{3}{32}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n, \qquad 0 < |z| < 4}.$$

Torna all'esercizio 4.4.5

Soluzione esercizio 4.4.7 Scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0 della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(1/z)}{z^2-4}$$

nella corona $0 < |z| < 2$.

Soluzione.

Metodo: sviluppo della parte essenziale e serie geometrica per il fattore razionale. Nella corona $0 < |z| < 2$,

$$\cos(1/z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{-2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{1}{z^2-4} = -\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^{2m}}{4^{m+1}}.$$

Primo sviluppo. Serie di Laurent di $\cos(1/z)$.
Secondo sviluppo. Serie geometrica valida per $|z| < 2$.

Moltiplicando le due serie,

$$f(z) = -\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2m-2k}}{4^{m+1}(2k)!}, \qquad 0 < |z| < 2.$$

Prima uguaglianza. Prodotto degli sviluppi precedenti.

Poiche' compaiono infiniti termini con potenze negative di z, la singolarita' in 0 e' essenziale.

Risultato.

$$\boxed{\frac{\cos(1/z)}{z^2-4} = -\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2m-2k}}{4^{m+1}(2k)!}, \qquad 0 < |z| < 2}.$$

Torna all'esercizio 4.4.7

4.8.4 Singolarita' e residui tramite sviluppi

Soluzione esercizio 4.5.1 Si consideri

$$f(z) = \frac{z\,e^{3/z}}{(z-2)(z+3i)}.$$

Determinare le singolarita' finite, classificarle, calcolare i residui e scrivere lo sviluppo di Laurent relativo a $z = 0$.

Soluzione.

Le singolarita' finite sono

$$z = 0, \qquad z = 2, \qquad z = -3i.$$

Il punto $z = 0$ e' una singolarita' essenziale, perche' compare il fattore $e^{3/z}$. I punti $z = 2$ e $z = -3i$ sono poli semplici.

Metodo per i poli semplici: formula del residuo come limite. Si ha

$$\mathrm{Res}(f,2) = \frac{2e^{3/2}}{2+3i}, \qquad \mathrm{Res}(f,-3i) = \frac{3ie^{i}}{2+3i}. \tag{7}$$

Primo residuo. Polo semplice in $z = 2$.
Secondo residuo. Polo semplice in $z = -3i$.

Per calcolare il residuo in 0, usiamo il teorema del residuo all'infinito. Per $z \to \infty$,

$$f(z) = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

quindi

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = -1. \tag{8}$$

Definizione di residuo all'infinito.

Allora

$$\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2) + \mathrm{Res}(f,-3i) + \mathrm{Res}(f,\infty) = 0.$$

Teorema del residuo all'infinito.

Usando (7) e (8),

$$\mathrm{Res}(f,0) = 1 - \frac{2e^{3/2}}{2+3i} - \frac{3ie^{i}}{2+3i}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione dei residui in 2, $-3i$ e ∞.

Per lo sviluppo in 0, lavoriamo nella corona $0 < |z| < 2$. Scomponiamo prima il fattore razionale:

$$\frac{z}{(z-2)(z+3i)} = \frac{2}{2+3i}\frac{1}{z-2} + \frac{3i}{2+3i}\frac{1}{z+3i}. \tag{9}$$

Nella corona $0 < |z| < 2$,

$$e^{3/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!z^k}, \qquad \frac{1}{z-2} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{2^{m+1}}, \qquad \frac{1}{z+3i} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m z^m}{(3i)^{m+1}}.$$

Primo sviluppo. Serie di Laurent dell'esponenziale.
Secondo e terzo sviluppo. Serie geometriche.

Usando (9), otteniamo

$$f(z) = \left[-\frac{2}{2+3i}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^m}{2^{m+1}} + \frac{3i}{2+3i}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m z^m}{(3i)^{m+1}}\right]\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{k!z^k}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione degli sviluppi geometrici e di $e^{3/z}$ in (9).

Risultato.

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,2) = \frac{2e^{3/2}}{2+3i}, \quad \mathrm{Res}(f,-3i) = \frac{3ie^{i}}{2+3i}, \quad \mathrm{Res}(f,0) = 1 - \frac{2e^{3/2}+3ie^{i}}{2+3i}}.$$

Torna all'esercizio 4.5.1

Soluzione esercizio 4.5.3 Si consideri
$$f(z)=\frac{(z+1)\cosh(3/z)}{(z-2)(z+5)}.$$
Determinare le singolarita' finite, classificarle e calcolare i relativi residui.

Soluzione.

Le singolarita' finite sono
$$z=0,\qquad z=2,\qquad z=-5.$$
Il punto $z=0$ e' una singolarita' essenziale, perche' compare il fattore $\cosh(3/z)$. I punti $z=2$ e $z=-5$ sono poli semplici.

Metodo per i poli semplici: formula del residuo come limite. Si ha
$$\operatorname{Res}(f,2)=\frac{3}{7}\cosh\frac{3}{2},\qquad \operatorname{Res}(f,-5)=\frac{4}{7}\cosh\frac{3}{5}. \tag{10}$$
Primo residuo. Polo semplice in $z=2$.
Secondo residuo. Polo semplice in $z=-5$.

Per $z\to\infty$,
$$f(z)=\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$
quindi
$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-1. \tag{11}$$
Definizione di residuo all'infinito.

Allora
$$\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,2)+\operatorname{Res}(f,-5)+\operatorname{Res}(f,\infty)=0.$$
Teorema del residuo all'infinito.

Usando (10) e (11),
$$\operatorname{Res}(f,0)=1-\frac{3}{7}\cosh\frac{3}{2}-\frac{4}{7}\cosh\frac{3}{5}.$$
Prima uguaglianza. Sostituzione dei residui in 2, -5 e ∞.

Risultato.
$$\boxed{\operatorname{Res}(f,2)=\frac{3}{7}\cosh\frac{3}{2},\quad \operatorname{Res}(f,-5)=\frac{4}{7}\cosh\frac{3}{5},\quad \operatorname{Res}(f,0)=1-\frac{3}{7}\cosh\frac{3}{2}-\frac{4}{7}\cosh\frac{3}{5}}.$$

Torna all'esercizio 4.5.3

Soluzione esercizio 4.5.5 Si consideri
$$f(z)=\frac{e^{-2/z^2}}{(z^2-4)(z-3i)}.$$
Determinare le singolarita', classificarle e calcolare i residui.

Soluzione.

Le singolarita' finite sono
$$z=0,\qquad z=2,\qquad z=-2,\qquad z=3i.$$
Il punto $z=0$ e' una singolarita' essenziale. I punti 2, -2 e $3i$ sono poli semplici.

Metodo per i poli semplici: formula del residuo come limite. Si ottiene
$$\operatorname{Res}(f,2)=\frac{e^{-1/2}}{4(2-3i)},\qquad \operatorname{Res}(f,-2)=\frac{e^{-1/2}}{4(2+3i)},\qquad \operatorname{Res}(f,3i)=-\frac{e^{2/9}}{13}. \tag{12}$$
Primo residuo. Polo semplice in $z=2$.

Secondo residuo. Polo semplice in $z = -2$.
Terzo residuo. Polo semplice in $z = 3i$.

Per $z \to \infty$, si ha

$$f(z) = O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

percio'

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = 0. \tag{13}$$

Definizione di residuo all'infinito.

Allora

$$\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 2) + \operatorname{Res}(f, -2) + \operatorname{Res}(f, 3i) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

Teorema del residuo all'infinito.

Usando (12) e (13),

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\left[\frac{e^{-1/2}}{4(2-3i)} + \frac{e^{-1/2}}{4(2+3i)} - \frac{e^{2/9}}{13}\right] = \frac{e^{2/9} - e^{-1/2}}{13}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione dei residui in 2, -2, $3i$ e ∞.

Risultato.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, 2) = \frac{e^{-1/2}}{4(2-3i)}, \quad \operatorname{Res}(f, -2) = \frac{e^{-1/2}}{4(2+3i)}, \quad \operatorname{Res}(f, 3i) = -\frac{e^{2/9}}{13}, \quad \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{e^{2/9} - e^{-1/2}}{13}}.$$

Torna all'esercizio 4.5.5

Soluzione esercizio 4.5.7 Si consideri

$$f(z) = \frac{z^2 \sin(1/z)}{(z-1)^2}.$$

Determinare le singolarita', classificarle e scrivere lo sviluppo di Laurent centrato in 0, precisandone la corona di convergenza.

Soluzione.

Le singolarita' finite sono

$$z = 0, \qquad z = 1.$$

Il punto $z = 0$ e' una singolarita' essenziale, perche' lo sviluppo di $z^2 \sin(1/z)$ contiene infiniti termini con potenze negative. Il punto $z = 1$ e' un polo di ordine 2, perche' $\sin 1 \neq 0$.

La corona di convergenza dello sviluppo centrato in 0 e' $0 < |z| < 1$, perche' la singolarita' piu' vicina a 0, diversa da 0, e' $z = 1$.

Metodo: sviluppo di Laurent di $\sin(1/z)$ e serie geometrica derivata. Si ha

$$z^2 \sin(1/z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{1-2k}}{(2k+1)!}, \qquad \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) z^m.$$

Primo sviluppo. Serie di Laurent di $z^2 \sin(1/z)$.
Secondo sviluppo. Serie geometrica derivata, valida per $|z| < 1$.

Moltiplicando,

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (m+1)(-1)^k \frac{z^{m+1-2k}}{(2k+1)!}, \qquad 0 < |z| < 1.$$

Prima uguaglianza. Prodotto degli sviluppi precedenti.

Risultato.

$$\boxed{f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (m+1)(-1)^k \frac{z^{m+1-2k}}{(2k+1)!}, \qquad 0 < |z| < 1}.$$

Torna all'esercizio 4.5.7

4.8.5 Singolarita' all'infinito

Soluzione esercizio 4.6.1 Classificare la singolarita' all'infinito e calcolare il residuo all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-1)(z+2)^2}.$$

Soluzione.

Metodo: cambio $w = 1/z$. Studiamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1 + 2w^2}{1 + 3w - 4w^3}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = 1/w$.

La funzione $f(1/w)$ e' olomorfa in $w = 0$, perche' il denominatore vale 1 in $w = 0$. Dunque $z = \infty$ e' una singolarita' eliminabile.

Per il residuo all'infinito, cerchiamo il coefficiente di z^{-1} nello sviluppo per $|z|$ grande. Si ha

$$f(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 + 3z^{-1} - 4z^{-3}} = 1 - \frac{3}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Prima uguaglianza. Divisione per z^3 al numeratore e al denominatore.
Seconda uguaglianza. Sviluppo in potenze di $1/z$.

Quindi il coefficiente di z^{-1} e' -3. Pertanto

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = 3.$$

Definizione di residuo all'infinito.

Risultato.

$$\boxed{\infty \text{ e' una singolarita' eliminabile}}, \qquad \boxed{\mathrm{Res}(f, \infty) = 3}.$$

Torna all'esercizio 4.6.1

Soluzione esercizio 4.6.3 Classificare $z = \infty$ e calcolare il residuo all'infinito di

$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{z(z-2)(z+1)}.$$

Soluzione.

Metodo: cambio $w = 1/z$. Studiamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w(1 + 3w^2)}{(1 - 2w)(1 + w)}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = 1/w$.

La funzione $f(1/w)$ e' olomorfa in $w = 0$ e si annulla in $w = 0$. Dunque $z = \infty$ e' una singolarita' eliminabile.

Per il residuo all'infinito, sviluppiamo per $|z|$ grande:

$$f(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-3}}{(1 - 2z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Prima uguaglianza. Divisione per z^3 al numeratore e al denominatore.
Seconda uguaglianza. Sviluppo in potenze di $1/z$.

Il coefficiente di z^{-1} e' 1, quindi

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -1.$$

Definizione di residuo all'infinito.

Risultato.

$$\boxed{\infty \text{ e' una singolarita' eliminabile}}, \qquad \boxed{\mathrm{Res}(f, \infty) = -1}.$$

Torna all'esercizio 4.6.3

Soluzione esercizio 4.6.5 Classificare la singolarita' all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{(z^2+1)\cos(\pi z)}{z^2+9}.$$

Soluzione.
Metodo: cambio $w = 1/z$. Studiamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1+w^2}{1+9w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right).$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = 1/w$.
Il fattore

$$\frac{1+w^2}{1+9w^2}$$

e' olomorfo e non nullo in $w = 0$, mentre $\cos(\pi/w)$ ha una singolarita' essenziale in $w = 0$. Dunque $z = \infty$ e' una singolarita' essenziale.
Risultato.

$$\boxed{\infty \text{ e' una singolarita' essenziale}}.$$

Torna all'esercizio 4.6.5

Soluzione esercizio 4.6.7 Studiare $z = \infty$ per

$$f(z) = \frac{\sin(2/z)}{z-1}.$$

Soluzione.
Metodo: cambio $w = 1/z$. Studiamo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\sin(2w)}{\frac{1}{w}-1} = \frac{w\sin(2w)}{1-w}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = 1/w$.
La funzione $w\sin(2w)/(1-w)$ e' olomorfa in $w = 0$. Inoltre

$$\frac{w\sin(2w)}{1-w} = 2w^2 + O(w^3).$$

Sviluppo di Taylor in $w = 0$.
Dunque $z = \infty$ e' una singolarita' eliminabile e il valore eliminabile e' 0.
Per il residuo all'infinito, sviluppiamo per $|z|$ grande:

$$\frac{\sin(2/z)}{z-1} = \left(\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)\left(\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \frac{2}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Prima uguaglianza. Sviluppi di $\sin(2/z)$ e di $1/(z-1)$ per $|z|$ grande.
Non compare il termine in z^{-1}, quindi

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = 0.$$

Definizione di residuo all'infinito.
Risultato.

$$\boxed{\infty \text{ e' una singolarita' eliminabile}}, \qquad \boxed{\operatorname{Res}(f,\infty) = 0}.$$

Torna all'esercizio 4.6.7

5 Integrali

5.1 Integrali trigonometrici su periodi interi con i residui

Gli integrali di questa sezione hanno la forma generale

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} \frac{P(\sin t, \cos t)}{a + b\sin t + c\cos t}\, dt, \qquad k \in \mathbb{N},$$

oppure forme piu' semplici, come

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{a + b\sin t}\, dt.$$

Il punto essenziale e' trasformare l'integrale reale su un numero intero di periodi in un integrale complesso sulla circonferenza unitaria.

Metodo.

1. **Usare la periodicita'.** Se la funzione integranda e' 2π-periodica e non ha singolarita' sull'intervallo di integrazione, allora
$$\int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi} f(t)\, dt = k \int_0^{2\pi} f(t)\, dt.$$
Quindi e' sufficiente calcolare l'integrale su un periodo.

2. **Controllare la convergenza.** Prima di applicare il metodo dei residui bisogna verificare che il denominatore non si annulli sull'intervallo reale. Nel caso $a + b\sin t$, poiche' $\sin t \in [-1, 1]$, si ha:
$$|a| > |b| \Longrightarrow a + b\sin t \neq 0 \quad \text{per ogni } t.$$
Se invece $|a| \leq |b|$, il denominatore si annulla per qualche valore reale di t e l'integrale improprio diverge, salvo cancellazioni esplicite con il numeratore. Nel caso generale
$$a + b\sin t + c\cos t$$
si usa
$$b\sin t + c\cos t = R\sin(t + \varphi), \qquad R = \sqrt{b^2 + c^2},$$
e il criterio diventa $|a| > R$.

3. **Ridurre la frazione.** Se al numeratore compaiono potenze di seno o coseno, conviene eseguire una divisione rispetto alla funzione trigonometrica che compare nel denominatore. Per esempio, se $b \neq 0$,
$$\frac{\sin t}{a + b\sin t} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\frac{1}{a + b\sin t}.$$
In questo modo l'integrale si riduce a una combinazione di integrali elementari e integrali fondamentali del tipo
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\sin t}.$$

4. **Passare alla circonferenza unitaria.** Si pone
$$z = e^{it}, \qquad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$
Se al numeratore compaiono angoli multipli, si usa direttamente
$$\sin(mt) = \frac{z^m - z^{-m}}{2i}, \qquad \cos(mt) = \frac{z^m + z^{-m}}{2}.$$
Quando t varia in un intervallo di lunghezza 2π, il punto z percorre una volta la circonferenza $|z| = 1$. L'integrale reale diventa quindi
$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \oint_{|z|=1} F(z)\, dz,$$
dove $F(z)$ e' una funzione razionale.

5. **Individuare i poli interni.** I poli sono gli zeri del denominatore della funzione razionale $F(z)$. Nel calcolo con i residui si sommano solo i residui dei poli che soddisfano

$$|z| < 1.$$

Un polo su $|z| = 1$ corrisponde a una singolarita' reale dell'integrale iniziale.

6. **Calcolare i residui.** Se z_0 e' un polo semplice e

$$F(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z_0) = 0, \qquad h'(z_0) \neq 0,$$

allora

$$\mathrm{Res}(F, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

7. **Applicare il teorema dei residui.** Infine

$$\oint_{|z|=1} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(F, z_j).$$

Formula guida. Per $|a| > |b|$ vale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \sin t} = \frac{2\pi\ \mathrm{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

La stessa formula vale sostituendo $\sin t$ con $\cos t$. In particolare, se $a > |b|$ il risultato e' positivo; se $a < -|b|$ il risultato e' negativo. Se $|a| \leq |b|$, bisogna aspettarsi una divergenza.

Esercizi.

1. Calcolare
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\sin t}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.1.1

2. Calcolare
$$\int_\pi^{5\pi} \frac{2 + \cos^3 t}{-8 - 3\cos t}\, dt.$$

3. Calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(3t)}{2 + \cos t}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.1.3

4. Calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 + \sin^2 t}{2 + 3\sin t}\, dt.$$

5. Calcolare
$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{5 - 3\sin t}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.1.5

6. Calcolare
$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{-5 + 3\sin t}\, dt.$$

7. Calcolare
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 t}{4+\sin t}\,dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.1.7

8. Calcolare
$$\int_{0}^{4\pi} \frac{\sin(2t)+\sin^2 t}{5-3\sin t}\,dt.$$

9. Calcolare
$$\int_{2\pi}^{6\pi} \frac{1+\sin^4 t}{3-3\cos t}\,dt.$$

10. Calcolare
$$\int_{0}^{6\pi} \frac{2+\cos t}{7-4\cos t}\,dt.$$

11. Calcolare
$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{2+\cos^2 t}{-7-4\cos t}\,dt.$$

12. Calcolare
$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\sin^4 t}{6+5\sin t}\,dt.$$

13. Calcolare
$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{2+\sin t}{-2+3\cos t}\,dt.$$

14. Calcolare
$$\int_{\pi}^{5\pi} \frac{1+\cos(4t)}{-6+2\cos t}\,dt.$$

15. Calcolare
$$\int_{\pi}^{5\pi} \frac{1-\cos^2 t}{8-3\cos t}\,dt.$$

16. Calcolare
$$\int_{-2\pi}^{4\pi} \frac{\cos^2 t}{12+5\cos t}\,dt.$$

17. Calcolare
$$\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{3\sin t+\sin^3 t}{9+2\sin t}\,dt.$$

18. Calcolare
$$\int_{0}^{2\pi} \frac{3+\cos^2 t}{1+\sin t}\,dt.$$

19. Calcolare
$$\int_{0}^{8\pi} \frac{4-\cos t+\cos^2 t}{10-6\cos t}\,dt.$$

20. Calcolare
$$\int_{-4\pi}^{0} \frac{1+\sin^2 t}{-10-6\sin t}\,dt.$$

21. Calcolare
$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sin(3t)}{1+\sin t}\,dt.$$

22. Calcolare
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} \frac{\sin^5 t}{11+7\sin t}\,dt.$$
23. Calcolare
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{9\pi}{2}} \frac{2+\cos^2 t}{4-5\cos t}\,dt.$$
24. Calcolare
$$\int_{0}^{6\pi} \frac{5+2\cos t-\cos^3 t}{13-12\cos t}\,dt.$$
25. Calcolare
$$\int_{-5\pi}^{\pi} \frac{\cos^4 t}{14+9\sin t}\,dt.$$
26. Calcolare
$$\int_{3\pi}^{7\pi} \frac{2+\cos t+\cos^2 t}{-11+2\cos t}\,dt.$$
27. Calcolare
$$\int_{0}^{6\pi} \frac{2+\cos(5t)}{7-4\cos t}\,dt.$$
28. Calcolare
$$\int_{-3\pi}^{\pi} \frac{1+\sin^2 t}{-1+2\sin t}\,dt.$$
29. Calcolare
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{2}} \frac{6-\cos t}{15-4\cos t}\,dt.$$
30. Calcolare
$$\int_{0}^{4\pi} \frac{2+\sin^2 t}{-4+4\cos t}\,dt.$$
31. Calcolare
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{2}} \frac{\sin(4t)-\cos(2t)}{3-5\sin t}\,dt.$$
32. Calcolare
$$\int_{-\frac{7\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+\sin t-\sin^3 t}{-13+5\sin t}\,dt.$$

5.2 Integrali razionali sulla retta reale con i residui

Nei seguenti esercizi si richiede di calcolare l'integrale improprio usando metodi di Analisi Complessa. I poli sono quelli della funzione razionale ottenuta prolungando l'integranda al piano complesso.

Metodo.

1. **Controllare la convergenza.** Per un integrale del tipo
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$
bisogna verificare che $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e che il grado del denominatore sia almeno due unita' piu' grande del grado del numeratore:
$$\deg Q \geq \deg P + 2.$$
Questo garantisce la convergenza. Inoltre l'integrale sull'arco grande tende a zero.

2. **Prolungare la funzione al piano complesso.** Si considera

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Questa e' una funzione meromorfa. I poli sono gli zeri complessi di $Q(z)$, con la loro molteplicita'.

3. **Scegliere il contorno.** Si integra su un semicerchio superiore di raggio R, formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco

$$z = Re^{i\theta}, \qquad \theta \in [0, \pi].$$

Poi si manda $R \to +\infty$.

4. **Individuare i poli interni.** Si considerano solo i poli con

$$\operatorname{Im} z > 0.$$

I poli nel semipiano inferiore non contribuiscono al contorno scelto.

5. **Calcolare i residui.** Se il polo z_0 e' semplice e

$$F(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z_0) = 0, \qquad h'(z_0) \neq 0,$$

allora

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Se invece z_0 e' un polo di ordine m, si usa

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m F(z)\right] \Big|_{z=z_0}.$$

6. **Applicare il teorema dei residui.** Poiche' il contributo dell'arco grande tende a zero,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}(F, z_j).$$

Esercizi.

1. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.1

2. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}\, dx.$$

3. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2)^2(x^2+5)}\, dx.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.3

4. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+2x^2+5}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}\, dx.$$

5. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{(x^2+1)(x^2+2x+5)}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.5

6. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2+4)(x^2+6x+13)(x^2-2x+10)}\, dx.$$

7. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{(x^4+4)(x^2+9)}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.7

8. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 + x^2 + 1}{(x^2+1)^2(x^2+4)(x^2+9)^2}\, dx.$$

9. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 5x^2 + 6}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.9

10. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+16)(x^2+25)}\, dx.$$

11. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2+1)^3}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.11

12. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{(x^2+4)^3(x^2+9)}\, dx.$$

13. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{(x^2-2x+5)^2(x^2+4)}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.13

14. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + x^2 + 3}{(x^2+2x+10)^3}\, dx.$$

15. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2+1)^2(x^2+6x+13)^3}\, dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.2.15

5.3 Valori principali di funzioni razionali con poli reali

In questa classe di esercizi l'integranda e' una funzione razionale con almeno un polo sull'asse reale. L'integrale va quindi inteso nel senso del valore principale:
$$\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\, dt.$$
Nel metodo dei residui si chiude il contorno nel semipiano superiore e si escludono i poli reali con piccoli semicerchi. Se il grado del denominatore supera quello del numeratore di almeno 2, il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo.

1. **Verificare il tipo di poli reali.** La tecnica standard funziona direttamente quando i poli sull'asse reale sono semplici. Se compare un polo reale di ordine almeno 2, il valore principale in genere diverge, salvo cancellazioni esplicite nel numeratore.

2. **Passare alla funzione complessa.** Si considera la stessa funzione razionale nel piano complesso:

$$F(z) = R(z).$$

I poli possono essere interni al semipiano superiore, sull'asse reale oppure nel semipiano inferiore.

3. **Costruire il contorno indentato.** Si usa un semicerchio superiore di raggio R. Ogni polo reale semplice a_j viene evitato con un piccolo semicerchio superiore di raggio ε. Alla fine si mandano

$$R \to +\infty, \qquad \varepsilon \to 0^+.$$

4. **Valutare i contributi degli archi.** Il contributo dell'arco grande tende a zero se

$$R(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (z \to \infty).$$

Il piccolo semicerchio superiore attorno a un polo reale semplice a_j contribuisce con

$$-i\pi \operatorname{Res}(F, a_j).$$

5. **Somma dei residui interni.** I poli strettamente interni al contorno sono quelli con

$$\operatorname{Im} z > 0.$$

Per essi si calcola la somma dei residui ordinari.

6. **Ricavare il valore principale.** Se a_j sono i poli reali semplici e z_k i poli con $\operatorname{Im} z_k > 0$, allora

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\, dt = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(F, z_k) + i\pi \sum_{a_j \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}(F, a_j).$$

Dopo la semplificazione il risultato deve essere reale.

Esercizi.

1. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t-2)(t^2+4)}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.3.1

2. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t+1}{(t+1)(t^2+1)}\, dt.$$

3. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t-2)(t+1)(t-4)}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.3.3

4. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{(t-1)(t+2)(t^2+4)}\, dt.$$

5. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2-4)(t^2+1)}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.3.5

6. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2-1}{(t-3)(t^2+1)(t^2+9)}\, dt.$$

7. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3+2t}{(t^2-1)(t^2+4)(t^2+9)}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.3.7

8. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+t+1}{(t+3)(t-1)(t^2+2t+5)}\, dt.$$

9. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+4t+1}{(t^2-9)(t^2+2)}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.3.9

10. Calcolare
$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4+t^2+1}{(t-1)(t+2)(t^2+1)(t^2+4)(t^2+9)}\, dt.$$

5.4 Valori principali con il lemma di Jordan

Gli esercizi seguenti richiedono il calcolo di integrali oscillanti in valore principale. L'idea e' studiare
$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} R(t)\, dt, \qquad \lambda > 0,$$
chiudendo il contorno nel semipiano superiore e usando il lemma di Jordan. I poli reali si trattano con piccoli semicerchi di esclusione.

Metodo.

1. **Separare la funzione nelle sue parti reale e immaginaria.** Se l'integranda e' una funzione a valori complessi, prima di iniziare conviene separarla nella sua parte reale e nella sua parte immaginaria:
$$f(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t).$$
In questo modo
$$\int f(t)\, dt = \int \operatorname{Re} f(t)\, dt + i \int \operatorname{Im} f(t)\, dt,$$
e si possono risolvere separatamente i due integrali reali, usando per ciascuno il contorno piu' adatto.

2. **Scrivere seno e coseno tramite l'esponenziale.** Si parte dall'integrale complesso
$$J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} R(t)\, dt, \qquad \lambda > 0.$$
Poi si recupera l'integrale richiesto prendendo parte reale o parte immaginaria:
$$\operatorname{Re} J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda t) R(t)\, dt,$$
$$\operatorname{Im} J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda t) R(t)\, dt.$$

3. **Scegliere il semipiano corretto.** Se $\lambda > 0$, si chiude nel semipiano superiore, perche'

$$e^{i\lambda z} = e^{i\lambda x - \lambda y}, \qquad z = x + iy,$$

e quindi l'esponenziale decade quando $y > 0$.

4. **Applicare il lemma di Jordan.** Se $R(z)$ e' razionale e tende a zero abbastanza rapidamente, il contributo dell'arco grande e' nullo:

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} R(z)\, dz \longrightarrow 0 \qquad (R \to +\infty).$$

5. **Gestire i poli reali.** I poli reali semplici vengono evitati con piccoli semicerchi superiori. Se

$$F(z) = e^{i\lambda z} R(z),$$

allora ogni piccolo semicerchio superiore attorno a un polo reale semplice a_j contribuisce con

$$-i\pi \operatorname{Res}(F, a_j).$$

6. **Calcolare i residui nel semipiano superiore.** Si sommano i residui dei poli con

$$\operatorname{Im} z > 0.$$

I poli sull'asse reale non si includono in questa somma: vengono gia' considerati tramite i piccoli semicerchi.

7. **Ricavare l'integrale complesso.** Si ottiene

$$J = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(F, z_k) + i\pi \sum_{a_j \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}(F, a_j).$$

Infine si prende $\operatorname{Re} J$ oppure $\operatorname{Im} J$ a seconda dell'integrale richiesto.

Esercizi.

1. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2 - 9}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.1

2. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2 - 4}\, dt.$$

3. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{(t^2 + 4t + 13)(t + 4i)}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.3

4. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^2 - 1}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.4

5. Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sin(2t)}{t^2 - 4}\, dt.$$

6. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2i)\sin t}{t(t^2+4)(t-3i)}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.6

7. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3t)}{t^2-2t}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.7

8. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2-4t+3}\, dt.$$

9. Calcolare
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3t)}{(t^2-2t+5)(t-4i)}\, dt.$$

10. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sin t}{(t^2-1)(t^2+4)}\, dt.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 5.4.10

11. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{(t^2-4)(t^2+1)}\, dt.$$

12. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+i)\cos(2t)}{(t-2)(t^2+1)(t+3i)}\, dt.$$

13. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sin(3t)}{(t^2-9)(t^2+4)}\, dt.$$

14. Calcolare
$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+1)\cos t}{(t^2-1)(t^2+9)}\, dt.$$

5.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione esercizio 5.1.1 Calcolare
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}.$$

Soluzione. L'integrale e' proprio, perche'
$$3+2\sin t \geq 1 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Metodo: teorema dei residui sulla circonferenza unitaria. Poniamo
$$z = e^{it}, \qquad \sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Quando t varia da 0 a 2π, il punto z percorre una volta la circonferenza $|z|=1$ in verso antiorario. Quindi
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{3+\frac{z-z^{-1}}{i}} \frac{dz}{iz}.$$

Riducendo la funzione razionale si ottiene

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 3iz - 1}.$$

Poniamo

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 3iz - 1}.$$

Individuiamo i poli interni alla circonferenza unitaria. I poli sono gli zeri del denominatore:

$$z^2 + 3iz - 1 = 0 \Longrightarrow z_1 = \frac{i(-3 + \sqrt{5})}{2}, \qquad z_2 = \frac{i(-3 - \sqrt{5})}{2}.$$

Si ha

$$|z_1| = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1, \qquad |z_2| = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1,$$

Poli interni. Solo z_1.

$$I = \oint_{|z|=1} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(F, z_j) = 2\pi i\ \mathrm{Res}(F, z_1)$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: z_1.

Metodo per il calcolo del residuo: regola del residuo per un quoziente con zero semplice.

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i\ \mathrm{Res}(F, z_1) = 2\pi i \frac{1}{2z_1 + 3i} \\ &= 2\pi i \frac{1}{2\frac{i(-3+\sqrt{5})}{2} + 3i} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Seconda riga. Sostituzione $z_1 = \frac{i(-3+\sqrt{5})}{2}$.

Risultato.

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + 2\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

Torna all'esercizio 5.1.1

Soluzione esercizio 5.1.3 Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(3t)}{2 + \cos t}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale e' proprio, perche'

$$2 + \cos t \geq 1 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Ci sono almeno tre modi naturali per procedere.

Metodo 1. Riduzione alla forma fondamentale. Questo e' il metodo piu' economico per questo esercizio. Identita' trigonometrica:

$$\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

Ponendo $x = \cos t$, si divide il numeratore per il denominatore:

$$\frac{4x^3 - 3x}{x + 2} = 4x^2 - 8x + 13 - \frac{26}{x + 2}.$$

Quindi l'integrale si riscrive direttamente come

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(4\cos^2 t - 8\cos t + 13 - \frac{26}{2 + \cos t} \right) dt.$$

Rimane da calcolare l'integrale fondamentale

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Per periodicita',

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Con il cambio di fase $u = t + \frac{\pi}{2}$, e usando ancora la periodicita', si ottiene

$$K = \int_{0}^{2\pi} \frac{du}{2 + \sin u}.$$

Metodo: teorema dei residui sulla circonferenza unitaria. Poniamo

$$z = e^{iu}, \qquad \sin u = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad du = \frac{dz}{iz}.$$

Quando u varia da 0 a 2π, il punto z percorre una volta la circonferenza $|z| = 1$ in verso antiorario. Quindi

$$K = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Poniamo

$$H(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Individuiamo i poli interni alla circonferenza unitaria. I poli sono gli zeri del denominatore:

$$z^2 + 4iz - 1 = 0 \Longrightarrow z_1 = i(-2 + \sqrt{3}), \qquad z_2 = i(-2 - \sqrt{3}).$$

Si ha

$$|z_1| = 2 - \sqrt{3} < 1, \qquad |z_2| = 2 + \sqrt{3} > 1,$$

Poli interni. Solo z_1.

$$K = \oint_{|z|=1} H(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(H, z_j) = 2\pi i\ \mathrm{Res}(H, z_1).$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: z_1.

Metodo per il calcolo del residuo: regola del residuo per un quoziente con zero semplice.

$$\begin{aligned} K = 2\pi i\ \mathrm{Res}(H, z_1) &= 2\pi i \frac{2}{2z_1 + 4i} \\ &= 2\pi i \frac{2}{2i(-2 + \sqrt{3}) + 4i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Seconda riga. Sostituzione $z_1 = i(-2 + \sqrt{3})$.

Pertanto

$$\begin{aligned} I &= 4\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt - 8\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt + 13\int_{-\pi}^{\pi} dt - 26K \\ &= 4\pi + 26\pi - 26\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 30\pi - \frac{52\sqrt{3}}{3}\pi. \end{aligned}$$

Metodo 2. Parte reale e un solo esponenziale. Poiche' il denominatore e' reale,

$$I = \mathrm{Re}\,J, \qquad J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{3it}}{2 + \cos t}\,dt.$$

Questo evita di introdurre il termine z^{-3} e quindi evita poli di ordine alto. Poniamo

$$z = e^{it}, \qquad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Si ottiene

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{2z^3}{i(z^2 + 4z + 1)}\, dz.$$

Poniamo

$$G(z) = \frac{2z^3}{i(z^2 + 4z + 1)}.$$

I poli sono gli zeri di $z^2 + 4z + 1$:

$$\alpha = -2 + \sqrt{3}, \qquad \beta = -2 - \sqrt{3}.$$

Poiche'

$$|\alpha| = 2 - \sqrt{3} < 1, \qquad |\beta| = 2 + \sqrt{3} > 1,$$

Polo interno. Solo α.

$$J = \oint_{|z|=1} G(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(G, z_j) = 2\pi i\ \mathrm{Res}(G, \alpha).$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: α.

Metodo per il calcolo del residuo: regola del residuo per un quoziente con zero semplice.

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i\ \mathrm{Res}(G, \alpha) = 2\pi i\, \frac{2\alpha^3}{i(2\alpha + 4)} \\ &= 2\pi i\, \frac{2(-2 + \sqrt{3})^3}{i\left(2(-2 + \sqrt{3}) + 4\right)} = \frac{2\pi}{3}\left(45 - 26\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Seconda riga. Sostituzione $\alpha = -2 + \sqrt{3}$.

Il valore ottenuto e' reale; quindi

$$I = \mathrm{Re}\, J = 30\pi - \frac{52\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Metodo 3. Sostituzione diretta senza rielaborare l'integrando. Questo metodo funziona, ma introduce un polo di ordine 3 in 0. Poniamo

$$z = e^{it}, \qquad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \cos(3t) = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Allora

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^6 + 1}{iz^3(z^2 + 4z + 1)}\, dz.$$

Poniamo

$$F(z) = \frac{z^6 + 1}{iz^3(z^2 + 4z + 1)}.$$

I poli interni sono 0, di ordine 3, e

$$\alpha = -2 + \sqrt{3}.$$

Infatti l'altro zero $\beta = -2 - \sqrt{3}$ soddisfa $|\beta| > 1$.

$$I = \oint_{|z|=1} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(F, z_j) = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(F, 0) + \mathrm{Res}(F, \alpha)\right).$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: 0, α.

Metodo per il calcolo dei residui: formula del residuo per polo di ordine 3 in 0 e regola del residuo per un quoziente con zero semplice in α.

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i\left(\frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3F(z)\right]\Big|_{z=0} + \frac{(-2+\sqrt{3})^6+1}{i(-2+\sqrt{3})^3\left(2(-2+\sqrt{3})+4\right)}\right) \\ &= 2\pi i\left(-15i + \frac{26\sqrt{3}}{3}i\right) = 30\pi - \frac{52\sqrt{3}}{3}\pi. \end{aligned}$$

Residuo in α. Sostituzione $\alpha = -2+\sqrt{3}$.

Risultato.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(3t)}{2+\cos t}\,dt = 30\pi - \frac{52\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Torna all'esercizio 5.1.3

Soluzione esercizio 5.1.5 Calcolare

$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{5-3\sin t}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale e' proprio, perche'

$$5-3\sin t \geq 2 \qquad \text{per ogni } t\in\mathbb{R}.$$

La funzione integranda e' 2π-periodica. Poniamo

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{5-3\sin t}\,dt, \qquad J = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5-3\sin t}\,dt.$$

Allora

$$I = 2J. \tag{14}$$

Riduciamo la frazione. Ponendo $x = \sin t$, si ha

$$\frac{x^2}{5-3x} = -\frac{x}{3} - \frac{5}{9} + \frac{25}{9}\,\frac{1}{5-3x}.$$

Quindi

$$J = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t}{3} - \frac{5}{9} + \frac{25}{9}\,\frac{1}{5-3\sin t}\right)dt.$$

Rimane da calcolare l'integrale fondamentale

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}.$$

Metodo: teorema dei residui sulla circonferenza unitaria. Poniamo

$$z = e^{it}, \qquad \sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Quando t varia da 0 a 2π, il punto z percorre una volta la circonferenza $|z|=1$ in verso antiorario. Quindi

$$K = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5-\frac{3}{2i}(z-z^{-1})}\,\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{-3z^2+10iz+3}.$$

Poniamo

$$H(z) = \frac{2}{-3z^2+10iz+3}.$$

Individuiamo i poli interni alla circonferenza unitaria. I poli sono gli zeri del denominatore:

$$-3z^2 + 10iz + 3 = 0 \Longrightarrow z_1 = \frac{i}{3}, \qquad z_2 = 3i.$$

Si ha

$$|z_1| = \frac{1}{3} < 1, \qquad |z_2| = 3 > 1,$$

Poli interni. Solo z_1.

$$K = \oint_{|z|=1} H(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \mathrm{Res}(H, z_j) = 2\pi i\ \mathrm{Res}(H, z_1).$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: z_1.

Metodo per il calcolo del residuo: regola del residuo per un quoziente con zero semplice.

$$\begin{aligned} K &= 2\pi i\ \mathrm{Res}(H, z_1) = 2\pi i\,\frac{2}{-6z_1 + 10i} \\ &= 2\pi i\,\frac{2}{-6\frac{i}{3} + 10i} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Seconda riga. Sostituzione $z_1 = \frac{i}{3}$.

Pertanto

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \sin t\,dt - \frac{5}{9}\int_0^{2\pi} dt + \frac{25}{9}K \\ &= -\frac{10\pi}{9} + \frac{25}{9}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{18}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$I = 2J = \frac{5\pi}{9}.$$

Abbiamo usato la relazione (14), ottenuta dalla periodicita' dell'integranda.

Risultato.

$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin^2 t}{5 - 3\sin t}\,dt = \frac{5\pi}{9}.$$

Torna all'esercizio 5.1.5

Soluzione esercizio 5.1.7 Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 t}{4 + \sin t}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale e' proprio, perche'

$$4 + \sin t \geq 3 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Poniamo

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 t}{4 + \sin t}\,dt.$$

Riduciamo la frazione. Ponendo $x = \sin t$, si ha

$$\frac{x^3}{x+4} = x^2 - 4x + 16 - \frac{64}{x+4}.$$

Quindi

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin^2 t - 4\sin t + 16 - \frac{64}{4 + \sin t}\right) dt. \tag{15}$$

Rimane da calcolare l'integrale fondamentale

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{4 + \sin t}.$$

Per periodicita',
$$K = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sin t}.$$

Metodo: teorema dei residui sulla circonferenza unitaria. Poniamo
$$z = e^{it}, \qquad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Quando t varia da 0 a 2π, il punto z percorre una volta la circonferenza $|z| = 1$ in verso antiorario. Quindi
$$K = \oint_{|z|=1} \frac{1}{4 + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 8iz - 1}.$$

Poniamo
$$H(z) = \frac{2}{z^2 + 8iz - 1}.$$

Individuiamo i poli interni alla circonferenza unitaria. I poli sono gli zeri del denominatore:
$$z^2 + 8iz - 1 = 0 \Longrightarrow z_1 = i(-4 + \sqrt{15}), \qquad z_2 = i(-4 - \sqrt{15}).$$

Si ha
$$|z_1| = 4 - \sqrt{15} < 1, \qquad |z_2| = 4 + \sqrt{15} > 1,$$

Poli interni. Solo z_1.
$$K = \oint_{|z|=1} H(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} \operatorname{Res}(H, z_j) = 2\pi i \operatorname{Res}(H, z_1).$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: z_1.

Metodo per il calcolo del residuo: regola del residuo per un quoziente con zero semplice.
$$\begin{aligned} K &= 2\pi i \operatorname{Res}(H, z_1) = 2\pi i \frac{2}{2z_1 + 8i} \\ &= 2\pi i \frac{2}{2i(-4+\sqrt{15}) + 8i} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Seconda riga. Sostituzione $z_1 = i(-4 + \sqrt{15})$.

Calcoliamo I:
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\,dt - 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,dt + 16 \int_{-\pi}^{\pi} dt - 64K \\ &= \pi + 32\pi - 64\frac{2\pi}{\sqrt{15}} = 33\pi - \frac{128\pi}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione della riduzione (15).
Seconda uguaglianza, primo addendo. Sostituzione $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\,dt = \pi$.
Seconda uguaglianza, secondo addendo. Sostituzione $-4\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\,dt = -4 \cdot 0 = 0$.
Seconda uguaglianza, terzo addendo. Sostituzione $16\int_{-\pi}^{\pi} dt = 16 \cdot 2\pi = 32\pi$.
Seconda uguaglianza, quarto addendo. Sostituzione $K = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}$, da (16).
Terza uguaglianza. Semplificazione numerica.

Risultato.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3 t}{4 + \sin t}\,dt = 33\pi - \frac{128\pi}{\sqrt{15}}.$$

Torna all'esercizio 5.1.7

Soluzione esercizio 5.2.1 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$(x^2+1)(x^2+4) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di due unita' il grado del numeratore:

$$\deg\big((x^2+1)(x^2+4)\big) = 4, \qquad \deg(x^2) = 2.$$

Inoltre questa condizione garantisce che il contributo dell'arco grande tenda a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli sono

$$z = i, \qquad z = -i, \qquad z = 2i, \qquad z = -2i.$$

Nel semipiano superiore cadono solo

$$z_1 = i, \qquad z_2 = 2i.$$

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > 2$, i poli interni a Γ_R sono i e $2i$. Poiche' $F(z) = O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\,dz = 0.$$

Per $R > 2$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F,i) + \operatorname{Res}(F,2i)\big].$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: i, $2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F,i) + \operatorname{Res}(F,2i)\big]. \tag{17}$$

Metodo per il calcolo dei residui: entrambi i poli sono semplici, quindi si usa la formula del residuo come limite. Per il polo $z = i$,

$$\operatorname{Res}(F,i) = \lim_{z\to i}(z-i)F(z) = \left.\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i} = \frac{i^2}{(i+i)(i^2+4)} = \frac{i}{6}.$$

Terza uguaglianza. Semplificazione del fattore $z - i$, presente in $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$.
Quarta uguaglianza. Sostituzione $z = i$.

Per il polo $z = 2i$,

$$\operatorname{Res}(F,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)F(z) = \left.\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{z=2i} = \frac{(2i)^2}{((2i)^2+1)(2i+2i)} = -\frac{i}{3}.$$

Terza uguaglianza. Semplificazione del fattore $z - 2i$, presente in $z^2 + 4 = (z-2i)(z+2i)$.
Quarta uguaglianza. Sostituzione $z = 2i$.

Sostituiamo i residui in (17):

$$I = 2\pi i\left[\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right] = \frac{\pi}{3}.$$

Prima uguaglianza. Formula (17), cioe' $I = 2\pi i[\operatorname{Res}(F,i) + \operatorname{Res}(F,2i)]$.
Prima uguaglianza, primo residuo. Sostituzione $\operatorname{Res}(F,i) = \frac{i}{6}$.
Prima uguaglianza, secondo residuo. Sostituzione $\operatorname{Res}(F,2i) = -\frac{i}{3}$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

Torna all'esercizio 5.2.1

Soluzione esercizio 5.2.3 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2)^2(x^2+5)}\,dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$(x^2+2)^2(x^2+5) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e

$$\deg\big((x^2+2)^2(x^2+5)\big) = 6, \qquad \deg(x^2+3) = 2.$$

Inoltre $F(z) = O(z^{-4})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+2)^2(z^2+5)}.$$

I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = i\sqrt{2}, \qquad z_2 = i\sqrt{5}.$$

Il polo $z_1 = i\sqrt{2}$ e' doppio, mentre $z_2 = i\sqrt{5}$ e' semplice.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > \sqrt{5}$, i poli interni a Γ_R sono $i\sqrt{2}$ e $i\sqrt{5}$. Per $R > \sqrt{5}$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{5})\big].$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: $i\sqrt{2}$, $i\sqrt{5}$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{5})\big]. \tag{18}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del residuo per polo doppio in $i\sqrt{2}$, formula del limite per polo semplice in $i\sqrt{5}$. Per il polo doppio $z = i\sqrt{2}$,

$$\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2+3}{(z+i\sqrt{2})^2(z^2+5)}\right]\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} = -\frac{11\sqrt{2}}{144}i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per polo doppio.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = i\sqrt{2}$ dopo la derivazione.

Per il polo semplice $z = i\sqrt{5}$,

$$\mathrm{Res}(F, i\sqrt{5}) = \frac{z^2+3}{(z^2+2)^2(z+i\sqrt{5})}\Bigg|_{z=i\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{45}i.$$

Prima uguaglianza. Semplificazione del fattore $z - i\sqrt{5}$, presente in $z^2+5 = (z-i\sqrt{5})(z+i\sqrt{5})$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = i\sqrt{5}$.

Sostituiamo i residui in (18):

$$I = 2\pi i\left[-\frac{11\sqrt{2}}{144}i + \frac{\sqrt{5}}{45}i\right] = \frac{\pi}{360}\left(55\sqrt{2} - 16\sqrt{5}\right).$$

Prima uguaglianza. Formula (18), cioe' $I = 2\pi i[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{5})]$.
Prima uguaglianza, primo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) = -\frac{11\sqrt{2}}{144}i$.
Prima uguaglianza, secondo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, i\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{45}i$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2)^2(x^2+5)}\,dx = \frac{\pi}{360}\left(55\sqrt{2} - 16\sqrt{5}\right).$$

Torna all'esercizio 5.2.3

Soluzione esercizio 5.2.5 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{(x^2+1)(x^2+2x+5)}\,dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$x^2 + 1 > 0, \qquad x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di due unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2 - 2z + 4}{(z^2+1)(z^2+2z+5)}.$$

I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = i, \qquad z_2 = -1 + 2i.$$

Entrambi sono semplici.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > \sqrt{5}$, i poli interni a Γ_R sono i e $-1+2i$. Per $R > \sqrt{5}$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i) + \mathrm{Res}(F, -1+2i)\big].$$

Applicazione del teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: i, $-1+2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i) + \mathrm{Res}(F, -1+2i)\big]. \tag{19}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici. Per il polo $z = i$,

$$\mathrm{Res}(F, i) = \left.\frac{z^2 - 2z + 4}{(z+i)(z^2+2z+5)}\right|_{z=i} = -\frac{7}{20} - \frac{i}{5}.$$

Prima uguaglianza. Semplificazione del fattore $z - i$, presente in $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = i$.

Per il polo $z = -1 + 2i$,

$$\mathrm{Res}(F, -1+2i) = \left.\frac{z^2 - 2z + 4}{(z^2+1)(z+1+2i)}\right|_{z=-1+2i} = \frac{7}{20} - \frac{13}{40}i.$$

Prima uguaglianza. Semplificazione del fattore $z + 1 - 2i$, presente in $z^2 + 2z + 5 = (z+1-2i)(z+1+2i)$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = -1 + 2i$.

Sostituiamo i residui in (19):

$$I = 2\pi i\left[-\frac{7}{20} - \frac{i}{5} + \frac{7}{20} - \frac{13}{40}i\right] = \frac{21\pi}{20}.$$

Prima uguaglianza. Formula (19), cioe' $I = 2\pi i[\mathrm{Res}(F, i) + \mathrm{Res}(F, -1+2i)]$.
Prima uguaglianza, primo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, i) = -\frac{7}{20} - \frac{i}{5}$.
Prima uguaglianza, secondo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, -1+2i) = \frac{7}{20} - \frac{13}{40}i$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{(x^2+1)(x^2+2x+5)}\,dx = \frac{21\pi}{20}.$$

Torna all'esercizio 5.2.5

Soluzione esercizio 5.2.7 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{(x^4 + 4)(x^2 + 9)}\, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$x^4 + 4 > 0, \qquad x^2 + 9 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di due unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^4 + 3z^2 + 2}{(z^4 + 4)(z^2 + 9)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = -1 + i, \qquad z_3 = 3i.$$

Sono tutti poli semplici.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > 3$, i poli interni a Γ_R sono $1 + i$, $-1 + i$ e $3i$. Poiche' $F(z) = O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} F(z)\, dz = 0.$$

Per $R > 3$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\, dz = 2\pi i \big[\mathrm{Res}(F, 1+i) + \mathrm{Res}(F, -1+i) + \mathrm{Res}(F, 3i)\big].$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: $1 + i$, $-1 + i$, $3i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i \big[\mathrm{Res}(F, 1+i) + \mathrm{Res}(F, -1+i) + \mathrm{Res}(F, 3i)\big]. \tag{20}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del quoziente in corrispondenza di zeri semplici del denominatore. Per il polo $z = 1 + i$,

$$\mathrm{Res}(F, 1+i) = \left.\frac{z^4 + 3z^2 + 2}{4z^3(z^2 + 9)}\right|_{z=1+i} = \frac{(1+i)^4 + 3(1+i)^2 + 2}{4(1+i)^3((1+i)^2 + 9)} = \frac{4}{85} - \frac{13}{340} i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per zero semplice del fattore $z^4 + 4$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = 1 + i$.

Per il polo $z = -1 + i$,

$$\mathrm{Res}(F, -1+i) = \left.\frac{z^4 + 3z^2 + 2}{4z^3(z^2 + 9)}\right|_{z=-1+i} = \frac{(-1+i)^4 + 3(-1+i)^2 + 2}{4(-1+i)^3((-1+i)^2 + 9)} = -\frac{4}{85} - \frac{13}{340} i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per zero semplice del fattore $z^4 + 4$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = -1 + i$.

Per il polo $z = 3i$,

$$\mathrm{Res}(F, 3i) = \left.\frac{z^4 + 3z^2 + 2}{2z(z^4 + 4)}\right|_{z=3i} = \frac{(3i)^4 + 3(3i)^2 + 2}{2(3i)((3i)^4 + 4)} = -\frac{28}{255} i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per zero semplice del fattore $z^2 + 9$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = 3i$.

Sostituiamo i residui in (20):

$$I = 2\pi i\left[\frac{4}{85} - \frac{13}{340}i - \frac{4}{85} - \frac{13}{340}i - \frac{28}{255}i\right] = \frac{19\pi}{51}.$$

Prima uguaglianza. Formula (20), cioe' $I = 2\pi i[\mathrm{Res}(F, 1+i) + \mathrm{Res}(F, -1+i) + \mathrm{Res}(F, 3i)]$.
Prima uguaglianza, primo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, 1+i) = \frac{4}{85} - \frac{13}{340}i$.
Prima uguaglianza, secondo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, -1+i) = -\frac{4}{85} - \frac{13}{340}i$.
Prima uguaglianza, terzo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, 3i) = -\frac{28}{255}i$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{(x^4+4)(x^2+9)}\,dx = \frac{19\pi}{51}.$$

Torna all'esercizio 5.2.7

Soluzione esercizio 5.2.9 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5x^2+6}\,dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2+2)(x^2+3) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di due unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2+1}{z^4+5z^2+6} = \frac{z^2+1}{(z^2+2)(z^2+3)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = i\sqrt{2}, \qquad z_2 = i\sqrt{3}.$$

Entrambi sono semplici.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > \sqrt{3}$, i poli interni a Γ_R sono $i\sqrt{2}$ e $i\sqrt{3}$. Poiche' $F(z) = O(z^{-2})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\,dz = 0.$$

Per $R > \sqrt{3}$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{3})\big].$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: $i\sqrt{2}$, $i\sqrt{3}$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{3})\big]. \tag{21}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del quoziente in corrispondenza di zeri semplici del denominatore. Per il polo $z = i\sqrt{2}$,

$$\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) = \left.\frac{z^2+1}{2z(z^2+3)}\right|_{z=i\sqrt{2}} = \frac{(i\sqrt{2})^2+1}{2i\sqrt{2}((i\sqrt{2})^2+3)} = \frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per zero semplice del fattore z^2+2.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = i\sqrt{2}$.

Per il polo $z = i\sqrt{3}$,

$$\mathrm{Res}(F, i\sqrt{3}) = \left.\frac{z^2+1}{2z(z^2+2)}\right|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{(i\sqrt{3})^2+1}{2i\sqrt{3}((i\sqrt{3})^2+2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per zero semplice del fattore z^2+3.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $z = i\sqrt{3}$.

Sostituiamo i residui in (21):

$$I = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right] = \frac{\pi}{6}\left(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right).$$

Prima uguaglianza. Formula (21), cioe' $I = 2\pi i[\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + \mathrm{Res}(F, i\sqrt{3})]$.
Prima uguaglianza, primo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}i$.
Prima uguaglianza, secondo residuo. Sostituzione $\mathrm{Res}(F, i\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+5x^2+6}\,dx = \frac{\pi}{6}\left(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right).$$

Torna all'esercizio 5.2.9

Soluzione esercizio 5.2.11 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$(x^2+1)^3 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di quattro unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-4})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2+2}{(z^2+1)^3} = \frac{z^2+2}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

La funzione F e' meromorfa. Nel semipiano superiore cade solo il polo

$$z_1 = i.$$

Il polo $z = i$ ha ordine 3.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > 1$, il polo interno a Γ_R e' i. Poiche' $F(z) = O(z^{-4})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\,dz = 0.$$

Per $R > 1$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(F, i).$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: i.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\ \mathrm{Res}(F, i). \tag{22}$$

Metodo per il calcolo del residuo: formula per polo di ordine 3.

$$\mathrm{Res}(F, i) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left.\left[\frac{z^2+2}{(z+i)^3}\right]\right|_{z=i} = \frac{1}{2}\left.\left[\frac{2}{(z+i)^3} - \frac{12z}{(z+i)^4} + \frac{12(z^2+2)}{(z+i)^5}\right]\right|_{z=i}$$

Prima uguaglianza. Formula del residuo per polo di ordine 3.
Seconda uguaglianza. Derivazione seconda di $\frac{z^2+2}{(z+i)^3}$.

Valutiamo in $z = i$:

$$\operatorname{Res}(F, i) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(2i)^3} - \frac{12i}{(2i)^4} + \frac{12(i^2+2)}{(2i)^5}\right] = -\frac{7}{16}i. \tag{23}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $z = i$.

Sostituiamo il residuo ottenuto in (23) nella formula (22):

$$I = 2\pi i\left(-\frac{7}{16}i\right) = \frac{7\pi}{8}.$$

Prima uguaglianza. Formula (22), cioe' $I = 2\pi i \operatorname{Res}(F, i)$.
Prima uguaglianza. Formula (23), cioe' $\operatorname{Res}(F, i) = -\frac{7}{16}i$.

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{7\pi}{8}.$$

Torna all'esercizio 5.2.11

Soluzione esercizio 5.2.13 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+2x+1}{(x^2-2x+5)^2(x^2+4)}\, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0, \qquad x^2 + 4 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di tre unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-3})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^3+2z+1}{(z^2-2z+5)^2(z^2+4)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 2i.$$

Il polo $1 + 2i$ e' doppio, mentre il polo $2i$ e' semplice.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > \sqrt{5}$, i poli interni a Γ_R sono $1 + 2i$ e $2i$. Poiche' $F(z) = O(z^{-3})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} F(z)\, dz = 0.$$

Per $R > \sqrt{5}$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)\, dz = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F, 1+2i) + \operatorname{Res}(F, 2i)\big].$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: $1 + 2i$, $2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F, 1+2i) + \operatorname{Res}(F, 2i)\big]. \tag{24}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula per polo doppio in $1+2i$ e formula del limite per polo semplice in $2i$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F, 1+2i) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{z^3+2z+1}{(z-1+2i)^2(z^2+4)}\right]\bigg|_{z=1+2i} = -\frac{1}{17} - \frac{1}{68}i,\\
\operatorname{Res}(F, 2i) &= \frac{z^3+2z+1}{(z^2-2z+5)^2(z+2i)}\bigg|_{z=2i} = \frac{1}{17} - \frac{1}{68}i.
\end{aligned} \tag{25}$$

Prima riga. Formula del residuo per polo doppio.
Prima riga. Sostituzione $z = 1 + 2i$ dopo la derivazione.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z - 2i$, presente in $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 2i$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (25) nella formula (24):

$$I = 2\pi i \left[-\frac{1}{17} - \frac{1}{68} i + \frac{1}{17} - \frac{1}{68} i \right] = \frac{\pi}{17}.$$

Prima uguaglianza. Formula (24), cioe' $I = 2\pi i [\operatorname{Res}(F, 1 + 2i) + \operatorname{Res}(F, 2i)]$.
Prima uguaglianza. Formula (25).

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{(x^2 - 2x + 5)^2 (x^2 + 4)} \, dx = \frac{\pi}{17}.$$

Torna all'esercizio 5.2.13

Soluzione esercizio 5.2.15 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 6x + 13)^3} \, dx.$$

Soluzione. L'integrale converge. Infatti

$$x^2 + 1 > 0, \qquad x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 4 > 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

e il grado del denominatore supera di cinque unita' il grado del numeratore. Inoltre l'integranda prolungata e' $O(z^{-5})$ per $z \to \infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^5 - z^2 + 1}{(z^2 + 1)^2 (z^2 + 6z + 13)^3}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli nel semipiano superiore sono

$$z_1 = i, \qquad z_2 = -3 + 2i.$$

Il polo i e' doppio, mentre il polo $-3 + 2i$ e' triplo.

Sia Γ_R il contorno formato dal segmento $[-R, R]$ e dall'arco superiore C_R, con orientazione positiva. Per $R > \sqrt{13}$, i poli interni a Γ_R sono i e $-3 + 2i$. Poiche' $F(z) = O(z^{-5})$ per $z \to \infty$, si ha

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} F(z) \, dz = 0.$$

Per $R > \sqrt{13}$,

$$\oint_{\Gamma_R} F(z) \, dz = 2\pi i \big[\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -3 + 2i) \big].$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: i, $-3 + 2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$. Il contributo dell'arco C_R tende a zero, quindi

$$I = 2\pi i \big[\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -3 + 2i) \big]. \tag{26}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula per polo doppio in i e formula per polo triplo in $-3 + 2i$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F, i) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{z^5 - z^2 + 1}{(z + i)^2 (z^2 + 6z + 13)^3} \right] \Bigg|_{z=i} = \frac{1}{12000} + \frac{13}{108000} i, \\ \operatorname{Res}(F, -3 + 2i) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z^5 - z^2 + 1}{(z^2 + 1)^2 (z + 3 + 2i)^3} \right] \Bigg|_{z=-3+2i} = -\frac{1}{12000} + \frac{100543}{6912000} i. \end{aligned} \tag{27}$$

Prima riga. Formula del residuo per polo doppio.
Prima riga. Sostituzione $z = i$ dopo la derivazione.
Seconda riga. Formula del residuo per polo triplo.
Seconda riga. Sostituzione $z = -3 + 2i$ dopo la derivazione seconda.

Sostituiamo i residui ottenuti in (27) nella formula (26):

$$I = 2\pi i \left[\frac{1}{12000} + \frac{13}{108000} i - \frac{1}{12000} + \frac{100543}{6912000} i\right] = -\frac{811\pi}{27648}.$$

Prima uguaglianza. Formula (26), cioe' $I = 2\pi i[\operatorname{Res}(F, i) + \operatorname{Res}(F, -3 + 2i)]$.
Prima uguaglianza. Formula (27).

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 6x + 13)^3}\, dx = -\frac{811\pi}{27648}.$$

Torna all'esercizio 5.2.15

Soluzione esercizio 5.3.1 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t-2)(t^2+4)}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza del polo reale $t = 2$. Il polo e' semplice. Inoltre l'integranda e' $O(t^{-2})$ per $|t| \to +\infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore con indentazione del polo reale. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z}{(z-2)(z^2+4)} = \frac{z}{(z-2)(z-2i)(z+2i)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli sono

$$z = 2, \qquad z = 2i, \qquad z = -2i.$$

Il polo reale semplice e' 2, mentre il polo strettamente interno al semipiano superiore e' $2i$.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R, R]$, privato dell'intervallo $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$, dall'arco grande superiore C_R e dal piccolo semicerchio superiore $C_\varepsilon(2)$, percorso in senso orario. Per $R > 2$, il solo polo interno al contorno indentato e' $2i$.

Per $R > 2$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(F, 2i).$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno al contorno indentato: $2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo e il piccolo arco superiore attorno al polo reale 2 contribuisce con $-i\pi \operatorname{Res}(F, 2)$. Quindi

$$I - i\pi \operatorname{Res}(F, 2) = 2\pi i \operatorname{Res}(F, 2i). \tag{28}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (28) segue

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(F, 2i) + i\pi \operatorname{Res}(F, 2). \tag{29}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F, 2) &= \left.\frac{z}{z^2+4}\right|_{z=2} = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{Res}(F, 2i) &= \left.\frac{z}{(z-2)(z+2i)}\right|_{z=2i} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} i. \end{aligned} \tag{30}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z-2$.
Prima riga. Sostituzione $z=2$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-2i$.
Seconda riga. Sostituzione $z=2i$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (30) nella formula (29):

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}i\right)+i\pi\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Prima uguaglianza. Formula (29), cioe' $I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(F,2i)+i\pi\,\mathrm{Res}(F,2)$.
Prima uguaglianza. Formula (30).

Risultato.

$$\mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(t-2)(t^2+4)}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

Torna all'esercizio 5.3.1

Soluzione esercizio 5.3.3 Calcolare

$$I = \mathrm{v.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(t-2)(t+1)(t-4)}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t=-1, \qquad t=2, \qquad t=4.$$

Tutti questi poli sono semplici. Inoltre l'integranda e' $O(t^{-2})$ per $|t|\to+\infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore con indentazione dei poli reali. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z)=\frac{z}{(z-2)(z+1)(z-4)}.$$

La funzione F e' meromorfa e ha solo poli reali semplici. Non ci sono poli strettamente nel semipiano superiore.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R,R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -1, 2, 4, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-1)$, $C_\varepsilon(2)$, $C_\varepsilon(4)$, percorsi in senso orario. Per $R>4$, il contorno indentato non contiene poli al suo interno.

Per $R>4$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}}F(z)\,dz=0.$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; nessun polo interno al contorno indentato.

Passiamo al limite per $R\to+\infty$ e $\varepsilon\to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi\,\mathrm{Res}(F,a)$. Quindi

$$I-i\pi\big[\mathrm{Res}(F,-1)+\mathrm{Res}(F,2)+\mathrm{Res}(F,4)\big]=0. \tag{31}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (31) segue

$$I=i\pi\big[\mathrm{Res}(F,-1)+\mathrm{Res}(F,2)+\mathrm{Res}(F,4)\big]. \tag{32}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F,-1)&=\left.\frac{z}{(z-2)(z-4)}\right|_{z=-1}=-\frac{1}{15},\\
\mathrm{Res}(F,2)&=\left.\frac{z}{(z+1)(z-4)}\right|_{z=2}=-\frac{1}{3},\\
\mathrm{Res}(F,4)&=\left.\frac{z}{(z-2)(z+1)}\right|_{z=4}=\frac{2}{5}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+1$.
Prima riga. Sostituzione $z=-1$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-2$.
Seconda riga. Sostituzione $z=2$.
Terza riga. Semplificazione del fattore $z-4$.
Terza riga. Sostituzione $z=4$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (33) nella formula (32):

$$I = i\pi\left[-\frac{1}{15}-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right]=0.$$

Prima uguaglianza. Formula (32), cioe' $I = i\pi[\operatorname{Res}(F,-1)+\operatorname{Res}(F,2)+\operatorname{Res}(F,4)]$.
Prima uguaglianza. Formula (33).

Risultato.

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(t-2)(t+1)(t-4)}\,dt = 0.$$

Torna all'esercizio 5.3.3

Soluzione esercizio 5.3.5 Calcolare

$$I = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(t^2-4)(t^2+1)}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t=-2, \qquad t=2.$$

Entrambi sono semplici. Inoltre l'integranda e' $O(t^{-3})$ per $|t|\to+\infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore con indentazione dei poli reali. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2+1)} = \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-i)(z+i)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli reali semplici sono -2 e 2. Il polo strettamente interno al semipiano superiore e' i.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R,R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -2 e 2, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-2)$, $C_\varepsilon(2)$, percorsi in senso orario. Per $R>2$, il solo polo interno al contorno indentato e' i.

Per $R>2$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\,dz = 2\pi i\ \operatorname{Res}(F,i).$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno al contorno indentato: i.

Passiamo al limite per $R\to+\infty$ e $\varepsilon\to0^+$. L'arco grande ha contributo nullo. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi\operatorname{Res}(F,a)$. Quindi

$$I - i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-2)+\operatorname{Res}(F,2)\big] = 2\pi i\ \operatorname{Res}(F,i). \tag{34}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (34) segue

$$I = 2\pi i\ \operatorname{Res}(F,i) + i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-2)+\operatorname{Res}(F,2)\big]. \tag{35}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F,-2) &= \left.\frac{z}{(z-2)(z^2+1)}\right|_{z=-2} = \frac{1}{10}, \\ \operatorname{Res}(F,2) &= \left.\frac{z}{(z+2)(z^2+1)}\right|_{z=2} = \frac{1}{10}, \\ \operatorname{Res}(F,i) &= \left.\frac{z}{(z^2-4)(z+i)}\right|_{z=i} = -\frac{1}{10}. \end{aligned} \tag{36}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+2$.
Prima riga. Sostituzione $z=-2$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-2$.
Seconda riga. Sostituzione $z=2$.
Terza riga. Semplificazione del fattore $z-i$.
Terza riga. Sostituzione $z=i$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (36) nella formula (35):

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{10}\right) + i\pi\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right] = 0.$$

Prima uguaglianza. Formula (35), cioe' $I = 2\pi i \operatorname{Res}(F,i) + i\pi[\operatorname{Res}(F,-2)+\operatorname{Res}(F,2)]$.
Prima uguaglianza. Formula (36).

Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2-4)(t^2+1)}\,dt = 0.$$

Torna all'esercizio 5.3.5

Soluzione esercizio 5.3.7 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3+2t}{(t^2-1)(t^2+4)(t^2+9)}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t=-1, \qquad t=1.$$

Entrambi sono semplici. Inoltre l'integranda e' $O(t^{-3})$ per $|t|\to+\infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore con indentazione dei poli reali. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^3+2z}{(z^2-1)(z^2+4)(z^2+9)}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli reali semplici sono -1 e 1. I poli strettamente interni al semipiano superiore sono

$$z=2i, \qquad z=3i.$$

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R,R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -1 e 1, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-1)$, $C_\varepsilon(1)$, percorsi in senso orario. Per $R>3$, i poli interni al contorno indentato sono $2i$ e $3i$.

Per $R>3$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\,dz = 2\pi i\bigl[\operatorname{Res}(F,2i)+\operatorname{Res}(F,3i)\bigr].$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni al contorno indentato: $2i$, $3i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi \operatorname{Res}(F, a)$. Quindi

$$I - i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-1) + \operatorname{Res}(F,1)\big] = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F,2i) + \operatorname{Res}(F,3i)\big]. \tag{37}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (37) segue

$$I = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F,2i) + \operatorname{Res}(F,3i)\big] + i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-1) + \operatorname{Res}(F,1)\big]. \tag{38}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F,-1) &= \left.\frac{z^3+2z}{(z-1)(z^2+4)(z^2+9)}\right|_{z=-1} = \frac{3}{100},\\
\operatorname{Res}(F,1) &= \left.\frac{z^3+2z}{(z+1)(z^2+4)(z^2+9)}\right|_{z=1} = \frac{3}{100},\\
\operatorname{Res}(F,2i) &= \left.\frac{z^3+2z}{(z^2-1)(z+2i)(z^2+9)}\right|_{z=2i} = \frac{1}{25},\\
\operatorname{Res}(F,3i) &= \left.\frac{z^3+2z}{(z^2-1)(z^2+4)(z+3i)}\right|_{z=3i} = -\frac{7}{100}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+1$.
Prima riga. Sostituzione $z=-1$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-1$.
Seconda riga. Sostituzione $z=1$.
Terza riga. Semplificazione del fattore $z-2i$.
Terza riga. Sostituzione $z=2i$.
Quarta riga. Semplificazione del fattore $z-3i$.
Quarta riga. Sostituzione $z=3i$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (39) nella formula (38):

$$I = 2\pi i\left[\frac{1}{25} - \frac{7}{100}\right] + i\pi\left[\frac{3}{100} + \frac{3}{100}\right] = 0.$$

Prima uguaglianza. Formula (38).
Prima uguaglianza. Formula (39).

Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3+2t}{(t^2-1)(t^2+4)(t^2+9)}\,dt = 0.$$

Torna all'esercizio 5.3.7

Soluzione esercizio 5.3.9 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+4t+1}{(t^2-9)(t^2+2)}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t=-3, \qquad t=3.$$

Entrambi sono semplici. Inoltre l'integranda e' $O(t^{-2})$ per $|t| \to +\infty$, quindi il contributo dell'arco grande tende a zero.

Metodo: teorema dei residui su un semicerchio superiore con indentazione dei poli reali. Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z^2+4z+1}{(z^2-9)(z^2+2)} = \frac{z^2+4z+1}{(z-3)(z+3)(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})}.$$

La funzione F e' meromorfa. I poli reali semplici sono -3 e 3. Il polo strettamente interno al semipiano superiore e' $i\sqrt{2}$.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R, R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -3 e 3, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-3)$, $C_\varepsilon(3)$, percorsi in senso orario. Per $R > 3$, il solo polo interno al contorno indentato e' $i\sqrt{2}$.

Per $R > 3$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}).$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno al contorno indentato: $i\sqrt{2}$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi\,\mathrm{Res}(F, a)$. Quindi

$$I - i\pi\big[\mathrm{Res}(F, -3) + \mathrm{Res}(F, 3)\big] = 2\pi i \ \mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}). \tag{40}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (40) segue

$$I = 2\pi i \ \mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) + i\pi\big[\mathrm{Res}(F, -3) + \mathrm{Res}(F, 3)\big]. \tag{41}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F, -3) &= \left.\frac{z^2 + 4z + 1}{(z-3)(z^2+2)}\right|_{z=-3} = \frac{1}{33}, \\
\mathrm{Res}(F, 3) &= \left.\frac{z^2 + 4z + 1}{(z+3)(z^2+2)}\right|_{z=3} = \frac{1}{3}, \\
\mathrm{Res}(F, i\sqrt{2}) &= \left.\frac{z^2 + 4z + 1}{(z^2-9)(z+i\sqrt{2})}\right|_{z=i\sqrt{2}} = -\frac{2}{11} - \frac{\sqrt{2}}{44} i.
\end{aligned} \tag{42}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z + 3$.
Prima riga. Sostituzione $z = -3$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z - 3$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 3$.
Terza riga. Semplificazione del fattore $z - i\sqrt{2}$.
Terza riga. Sostituzione $z = i\sqrt{2}$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (42) nella formula (41):

$$I = 2\pi i \left[-\frac{2}{11} - \frac{\sqrt{2}}{44} i\right] + i\pi \left[\frac{1}{33} + \frac{1}{3}\right] = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{22}.$$

Prima uguaglianza. Formula (41).
Prima uguaglianza. Formula (42).

Risultato.

$$\mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 + 4t + 1}{(t^2-9)(t^2+2)}\, dt = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{22}.$$

Torna all'esercizio 5.3.9

Soluzione esercizio 5.4.1 Calcolare

$$I = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2 - 9}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t = -3, \qquad t = 3.$$

Entrambi sono semplici.

Metodo: lemma di Jordan applicato all'integrale complesso associato. Poniamo

$$J = \mathrm{v.\,p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2it}}{t^2-9}\, dt.$$

Allora

$$I = \operatorname{Im} J. \tag{43}$$

Prima uguaglianza. Definizione di J e identita' $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$.

Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2-9} = \frac{e^{2iz}}{(z-3)(z+3)}.$$

Poiche' $2 > 0$, si chiude il contorno nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero. I poli sono reali:

$$z = -3, \qquad z = 3.$$

Non ci sono poli strettamente nel semipiano superiore.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R, R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -3 e 3, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-3)$, $C_\varepsilon(3)$, percorsi in senso orario. Per $R > 3$, il contorno indentato non contiene poli al suo interno.

Per $R > 3$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 0.$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; nessun polo interno al contorno indentato.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo per il lemma di Jordan. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi \operatorname{Res}(F, a)$. Quindi

$$J - i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-3) + \operatorname{Res}(F,3)\big] = 0. \tag{44}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (44) segue

$$J = i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-3) + \operatorname{Res}(F,3)\big]. \tag{45}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F,-3) &= \left.\frac{e^{2iz}}{z-3}\right|_{z=-3} = -\frac{e^{-6i}}{6}, \\ \operatorname{Res}(F,3) &= \left.\frac{e^{2iz}}{z+3}\right|_{z=3} = \frac{e^{6i}}{6}. \end{aligned} \tag{46}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+3$.
Prima riga. Sostituzione $z = -3$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-3$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 3$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (46) nella formula (45):

$$J = i\pi\left[-\frac{e^{-6i}}{6} + \frac{e^{6i}}{6}\right] = i\pi\,\frac{e^{6i} - e^{-6i}}{6} = -\frac{\pi \sin 6}{3}. \tag{47}$$

Prima uguaglianza. Formula (45).
Prima uguaglianza. Formula (46).
Terza uguaglianza. Identita' $e^{6i} - e^{-6i} = 2i\sin 6$.

Usiamo (43) e (47):

$$I = \operatorname{Im} J = \operatorname{Im}\left(-\frac{\pi \sin 6}{3}\right) = 0.$$

Prima uguaglianza. Formula (43).
Seconda uguaglianza. Formula (47).

Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2-9}\, dt = 0.$$

Torna all'esercizio 5.4.1

Soluzione esercizio 5.4.4 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^2-1}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t = -1, \qquad t = 1.$$

Entrambi sono semplici.

Metodo: lemma di Jordan applicato all'integrale complesso associato. Poniamo

$$J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2it}}{t^2-1}\, dt.$$

Allora

$$I = \operatorname{Re} J. \tag{48}$$

Prima uguaglianza. Definizione di J e identita' $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$.

Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{e^{2iz}}{z^2-1} = \frac{e^{2iz}}{(z-1)(z+1)}.$$

Poiche' $2 > 0$, si chiude il contorno nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero. I poli sono reali:

$$z = -1, \qquad z = 1.$$

Non ci sono poli strettamente nel semipiano superiore.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R, R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -1 e 1, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-1)$, $C_\varepsilon(1)$, percorsi in senso orario. Per $R > 1$, il contorno indentato non contiene poli al suo interno.

Per $R > 1$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 0.$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; nessun polo interno al contorno indentato.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo per il lemma di Jordan. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi \operatorname{Res}(F, a)$. Quindi

$$J - i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-1) + \operatorname{Res}(F,1)\big] = 0. \tag{49}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (49) segue

$$J = i\pi\big[\operatorname{Res}(F,-1) + \operatorname{Res}(F,1)\big]. \tag{50}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F,-1) &= \left.\frac{e^{2iz}}{z-1}\right|_{z=-1} = -\frac{e^{-2i}}{2}, \\ \operatorname{Res}(F,1) &= \left.\frac{e^{2iz}}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{e^{2i}}{2}. \end{aligned} \tag{51}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+1$.
Prima riga. Sostituzione $z=-1$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-1$.
Seconda riga. Sostituzione $z=1$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (51) nella formula (50):

$$J = i\pi\left[-\frac{e^{-2i}}{2}+\frac{e^{2i}}{2}\right] = i\pi\,\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2} = -\pi\sin 2. \tag{52}$$

Prima uguaglianza. Formula (50).
Prima uguaglianza. Formula (51).
Terza uguaglianza. Identita' $e^{2i}-e^{-2i}=2i\sin 2$.

Usiamo (48) e (52):

$$I = \operatorname{Re} J = \operatorname{Re}(-\pi\sin 2) = -\pi\sin 2.$$

Prima uguaglianza. Formula (48).
Seconda uguaglianza. Formula (52).

Risultato.

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t^2-1}\,dt = -\pi\sin 2.$$

Torna all'esercizio 5.4.4

Soluzione esercizio 5.4.7 Calcolare

$$I = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(3t)}{t^2-2t}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t=0, \qquad t=2.$$

Entrambi sono semplici.

Metodo: lemma di Jordan applicato all'integrale complesso associato. Poniamo

$$J = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3it}}{t^2-2t}\,dt.$$

Allora

$$I = \operatorname{Re} J. \tag{53}$$

Prima uguaglianza. Definizione di J e identita' $e^{3it}=\cos(3t)+i\sin(3t)$.

Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{e^{3iz}}{z^2-2z} = \frac{e^{3iz}}{z(z-2)}.$$

Poiche' $3>0$, si chiude il contorno nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero. I poli sono reali:

$$z=0, \qquad z=2.$$

Non ci sono poli strettamente nel semipiano superiore.

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R,R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a 0 e 2, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(0)$, $C_\varepsilon(2)$, percorsi in senso orario. Per $R>2$, il contorno indentato non contiene poli al suo interno.

Per $R>2$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\,dz = 0.$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; nessun polo interno al contorno indentato.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo per il lemma di Jordan. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi \operatorname{Res}(F, a)$. Quindi

$$J - i\pi\big[\operatorname{Res}(F,0) + \operatorname{Res}(F,2)\big] = 0. \tag{54}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (54) segue

$$J = i\pi\big[\operatorname{Res}(F,0) + \operatorname{Res}(F,2)\big]. \tag{55}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F,0) &= \left.\frac{e^{3iz}}{z-2}\right|_{z=0} = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{Res}(F,2) &= \left.\frac{e^{3iz}}{z}\right|_{z=2} = \frac{e^{6i}}{2}. \end{aligned} \tag{56}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore z.
Prima riga. Sostituzione $z = 0$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z - 2$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 2$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (56) nella formula (55):

$$J = i\pi\left[-\frac{1}{2} + \frac{e^{6i}}{2}\right] = \frac{i\pi}{2}(e^{6i} - 1) = -\frac{\pi \sin 6}{2} + \frac{i\pi(\cos 6 - 1)}{2}. \tag{57}$$

Prima uguaglianza. Formula (55).
Prima uguaglianza. Formula (56).
Terza uguaglianza. Identita' $e^{6i} = \cos 6 + i \sin 6$.

Usiamo (53) e (57):

$$I = \operatorname{Re} J = \operatorname{Re}\left(-\frac{\pi \sin 6}{2} + \frac{i\pi(\cos 6 - 1)}{2}\right) = -\frac{\pi \sin 6}{2}.$$

Prima uguaglianza. Formula (53).
Seconda uguaglianza. Formula (57).

Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3t)}{t^2 - 2t}\, dt = -\frac{\pi \sin 6}{2}.$$

Torna all'esercizio 5.4.7

Soluzione esercizio 5.4.10 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2-1)(t^2+4)}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale va inteso come valore principale per la presenza dei poli reali

$$t = -1, \qquad t = 1.$$

Entrambi sono semplici.

Metodo: lemma di Jordan applicato all'integrale complesso associato. Poniamo

$$J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, e^{it}}{(t^2-1)(t^2+4)}\, dt.$$

Allora

$$I = \operatorname{Im} J. \tag{58}$$

Prima uguaglianza. Definizione di J e identita' $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{z\, e^{iz}}{(z^2-1)(z^2+4)} = \frac{z\, e^{iz}}{(z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i)}.$$

Poiche' $1 > 0$, si chiude il contorno nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero. I poli sull'asse reale sono

$$z = -1, \qquad z = 1,$$

mentre il polo strettamente nel semipiano superiore e'

$$z = 2i.$$

Sia $\Gamma_{R,\varepsilon}$ il contorno formato dal segmento reale $[-R, R]$, privato dei piccoli intervalli attorno a -1 e 1, dall'arco grande superiore C_R e dai piccoli semicerchi superiori $C_\varepsilon(-1)$, $C_\varepsilon(1)$, percorsi in senso orario. Per $R > 2$, il contorno indentato contiene il polo $2i$.

Per $R > 2$,

$$\oint_{\Gamma_{R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i \; \mathrm{Res}(F, 2i).$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; polo interno: $2i$.

Passiamo al limite per $R \to +\infty$ e $\varepsilon \to 0^+$. L'arco grande ha contributo nullo per il lemma di Jordan. Per il lemma del cerchio piccolo, ciascun piccolo arco superiore attorno a un polo reale semplice a contribuisce con $-i\pi\, \mathrm{Res}(F, a)$. Quindi

$$J - i\pi\big[\mathrm{Res}(F,-1) + \mathrm{Res}(F,1)\big] = 2\pi i \; \mathrm{Res}(F, 2i). \tag{59}$$

Prima uguaglianza. Limite del contorno indentato.

Da (59) segue

$$J = 2\pi i \; \mathrm{Res}(F, 2i) + i\pi\big[\mathrm{Res}(F,-1) + \mathrm{Res}(F,1)\big]. \tag{60}$$

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(F,-1) &= \left.\frac{z\, e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)}\right|_{z=-1} = \frac{e^{-i}}{10}, \\
\mathrm{Res}(F,1) &= \left.\frac{z\, e^{iz}}{(z+1)(z^2+4)}\right|_{z=1} = \frac{e^{i}}{10}, \\
\mathrm{Res}(F,2i) &= \left.\frac{z\, e^{iz}}{(z^2-1)(z+2i)}\right|_{z=2i} = -\frac{e^{-2}}{10}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Prima riga. Semplificazione del fattore $z+1$.
Prima riga. Sostituzione $z = -1$.
Seconda riga. Semplificazione del fattore $z-1$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 1$.
Terza riga. Semplificazione del fattore $z-2i$.
Terza riga. Sostituzione $z = 2i$.

Sostituiamo i residui ottenuti in (61) nella formula (60):

$$J = 2\pi i \left[-\frac{e^{-2}}{10}\right] + i\pi \left[\frac{e^{-i}}{10} + \frac{e^{i}}{10}\right] = \frac{i\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right). \tag{62}$$

Prima uguaglianza. Formula (60).
Prima uguaglianza. Formula (61).
Seconda uguaglianza. Identita' $e^{i} + e^{-i} = 2\cos 1$.

Usiamo (58) e (62):

$$I = \operatorname{Im} J = \operatorname{Im}\left[\frac{i\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right)\right] = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right).$$

Prima uguaglianza. Formula (58).
Seconda uguaglianza. Formula (62).
Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sin t}{(t^2-1)(t^2+4)}\, dt = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - e^{-2}\right).$$

Torna all'esercizio 5.4.10

Soluzione esercizio 5.4.3 Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{(t^2+4t+13)(t+4i)}\, dt.$$

Soluzione. L'integranda e' a valori complessi. Separiamo prima parte reale e parte immaginaria. Poiche'

$$\frac{1}{t+4i} = \frac{t-4i}{t^2+16},$$

si ha

$$I = I_1 - 4iI_2, \tag{63}$$

dove

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sin(2t)}{(t^2+4t+13)(t^2+16)}\, dt, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{(t^2+4t+13)(t^2+16)}\, dt. \tag{64}$$

Prima uguaglianza. Razionalizzazione del fattore $t+4i$.
Formula (63). Separazione di parte reale e parte immaginaria.
Metodo: lemma di Jordan applicato separatamente ai due integrali reali. Poniamo

$$D(z) = (z^2+4z+13)(z^2+16),$$

e

$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{2it}}{D(t)}\, dt, \qquad K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2it}}{D(t)}\, dt.$$

Allora

$$I_1 = \operatorname{Im} K_1, \qquad I_2 = \operatorname{Im} K_2. \tag{65}$$

Prima uguaglianza. Identita' $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$.
Seconda uguaglianza. Identita' $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$.
I poli nel semipiano superiore sono

$$\alpha = -2+3i, \qquad \beta = 4i.$$

Poiche' $2 > 0$, si chiude nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero.
Per $j = 1, 2$, poniamo

$$F_1(z) = \frac{ze^{2iz}}{D(z)}, \qquad F_2(z) = \frac{e^{2iz}}{D(z)}.$$

Applicando il teorema dei residui si ottiene

$$K_j = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F_j,\alpha) + \operatorname{Res}(F_j,\beta)\big], \qquad j = 1, 2. \tag{66}$$

Teorema dei residui. Funzioni meromorfe; poli interni: α e β.
Lemma di Jordan. Contributo dell'arco grande nullo.

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F_1,\alpha) &= \frac{(9+58i)e^{-6-4i}}{1590}, &\quad \operatorname{Res}(F_1,\beta) &= -\frac{(3+16i)e^{-8}}{530}, \\ \operatorname{Res}(F_2,\alpha) &= \frac{(12-11i)e^{-6-4i}}{1590}, &\quad \operatorname{Res}(F_2,\beta) &= \frac{(-16+3i)e^{-8}}{2120}. \end{aligned} \tag{67}$$

Prima riga, primo residuo. Sostituzione $\alpha = -2+3i$.
Prima riga, secondo residuo. Sostituzione $\beta = 4i$.
Seconda riga, primo residuo. Sostituzione $\alpha = -2+3i$.
Seconda riga, secondo residuo. Sostituzione $\beta = 4i$.

Separiamo le parti immaginarie di K_1 e K_2:

$$\operatorname{Im} K_1 = \frac{\pi e^{-8}}{795}\left(58e^2\sin 4 + 9e^2\cos 4 - 9\right), \tag{68}$$

$$\operatorname{Im} K_2 = \frac{\pi e^{-8}}{795}\left(12e^2\cos 4 - 12 - 11e^2\sin 4\right). \tag{69}$$

Formula (68). Parte immaginaria di K_1.
Formula (68). Formula (66).
Formula (68). Formula (67).
Formula (69). Parte immaginaria di K_2.
Formula (69). Formula (66).
Formula (69). Formula (67).

Calcolo di I.

$$I = \frac{\pi e^{-8}}{795}\left(58e^2\sin 4 + 9e^2\cos 4 - 9\right) - \frac{4\pi i e^{-8}}{795}\left(12e^2\cos 4 - 12 - 11e^2\sin 4\right).$$

Prima uguaglianza. Formula (63).
Prima uguaglianza. Formula (64).
Prima uguaglianza. Formula (65).
Prima uguaglianza. Formula (68).
Prima uguaglianza. Formula (69).

Risultato.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{(t^2+4t+13)(t+4i)}\,dt = \frac{\pi e^{-8}}{795}\left(58e^2\sin 4 + 9e^2\cos 4 - 9\right) - \frac{4\pi i e^{-8}}{795}\left(12e^2\cos 4 - 12 - 11e^2\sin 4\right).$$

Torna all'esercizio 5.4.3

Soluzione esercizio 5.4.6 Calcolare

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2i)\sin t}{t(t^2+4)(t-3i)}\,dt.$$

Soluzione. L'integranda e' a valori complessi. Separiamo prima parte reale e parte immaginaria. Poiche'

$$\frac{t-2i}{t-3i} = \frac{(t-2i)(t+3i)}{t^2+9} = \frac{t^2+6+it}{t^2+9},$$

si ha

$$I = I_1 + iI_2, \tag{70}$$

dove

$$I_1 = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+6)\sin t}{t(t^2+4)(t^2+9)}\,dt, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{(t^2+4)(t^2+9)}\,dt. \tag{71}$$

Prima uguaglianza. Razionalizzazione del fattore $t-3i$.
Seconda uguaglianza. Separazione di parte reale e parte immaginaria.

Formula (70). Separazione dell'integrale.

Il secondo integrale e' nullo:

$$I_2 = 0. \tag{72}$$

Formula (72). Integranda dispari.

Resta da calcolare I_1. Poniamo

$$J = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t^2+6)e^{it}}{t(t^2+4)(t^2+9)}\, dt.$$

Allora

$$I_1 = \operatorname{Im} J. \tag{73}$$

Prima uguaglianza. Identita' $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Prolunghiamo l'integranda al piano complesso:

$$F(z) = \frac{(z^2+6)e^{iz}}{z(z^2+4)(z^2+9)}.$$

Il polo reale e'

$$z = 0,$$

mentre i poli strettamente nel semipiano superiore sono

$$z = 2i, \qquad z = 3i.$$

Poiche' $1 > 0$, si chiude nel semipiano superiore. Il lemma di Jordan garantisce che il contributo dell'arco grande tende a zero.

Con il contorno indentato sopra il polo reale 0, il teorema dei residui fornisce

$$J - i\pi \operatorname{Res}(F, 0) = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F, 2i) + \operatorname{Res}(F, 3i)\big]. \tag{74}$$

Teorema dei residui. Funzione meromorfa; poli interni: $2i$ e $3i$.
Lemma del cerchio piccolo. Polo reale: 0.
Lemma di Jordan. Contributo dell'arco grande nullo.

Metodo per il calcolo dei residui: formula del limite per poli semplici.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F, 0) &= \frac{1}{6}, \\ \operatorname{Res}(F, 2i) &= -\frac{e^{-2}}{20}, \\ \operatorname{Res}(F, 3i) &= -\frac{e^{-3}}{30}. \end{aligned} \tag{75}$$

Prima riga. Sostituzione $z = 0$.
Seconda riga. Sostituzione $z = 2i$.
Terza riga. Sostituzione $z = 3i$.

Isoliamo J.

$$J = 2\pi i\big[\operatorname{Res}(F, 2i) + \operatorname{Res}(F, 3i)\big] + i\pi \operatorname{Res}(F, 0). \tag{76}$$

Prima uguaglianza. Formula (74).

Calcolo di J.

$$J = i\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right). \tag{77}$$

Prima uguaglianza. Formula (76).
Prima uguaglianza. Formula (75).

Calcolo di I_1.

$$I_1 = \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right). \tag{78}$$

Prima uguaglianza. Formula (73).
Prima uguaglianza. Formula (77).
Calcolo di I.

$$I = \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right).$$

Prima uguaglianza. Formula (70).
Prima uguaglianza. Formula (72).
Prima uguaglianza. Formula (78).
Risultato.

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2i)\sin t}{t(t^2+4)(t-3i)}\, dt = \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{e^{-2}}{10} - \frac{e^{-3}}{15} \right).$$

Torna all'esercizio 5.4.6

6 Sviluppi in serie di Fourier

6.1 Metodo generale

Per una funzione 2π-periodica, integrabile su $[-\pi, \pi]$, la serie di Fourier si scrive nella forma

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt.$$

1. Se f e' pari, allora $b_n = 0$ per ogni n, e
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt.$$

2. Se f e' dispari, allora $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ per ogni n, e
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt.$$

3. Nei punti di continuita' la serie converge a $f(t)$.

4. Nei punti di discontinuita' di salto la serie converge alla media dei limiti laterali:
$$S(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}.$$

5. Nei punti estremi dell'intervallo fondamentale bisogna ricordare la periodicita'. Per esempio, per una funzione 2π-periodica,
$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2}.$$

6.2 Esercizi

Esercizi.

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 3(\pi^2 - t^2), & -\pi < t < 0, \\ 5(\pi - t)^2, & 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.
   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.2.1

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, pari, definita per $0 \le t \le \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 2\pi, & 0 \le t < \frac{\pi}{3}, \\ 2\pi - 3t, & \frac{\pi}{3} \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.
   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, dispari, definita per $0 < t \le \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.
   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.2.3

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < -\frac{\pi}{3}, \\ 2, & -\frac{\pi}{3} \le t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.
   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, pari, definita per $0 \le t \le \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 4 - t^2, & 0 \le t < \frac{\pi}{2}, \\ t - \pi, & \frac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.
   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.2.5

6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi, & -\pi < t < -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & -\frac{\pi}{2} \le t < 0, \\ \pi - t, & 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, dispari, definita per $0 < t \leq \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 < t < \frac{\pi}{4}, \\ 1 - t, & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}, \\ -2, & \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.2.7

8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 4, definita su $(-2, 2]$ da

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2, & -2 < t < 0, \\ t + 1, & 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

9. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, pari, definita per $0 \leq t \leq \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{3}, \\ t, & \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{2\pi}{3}, \\ \pi, & \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + \pi t, & -\pi < t < 0, \\ \pi t - t^2, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

11. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 6, pari, definita per $0 \leq t \leq 3$ da

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ 4 - t, & 1 \leq t < 2, \\ t - 3, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

12. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi < t < -\frac{\pi}{2}, \\ t^2, & -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della funzione.

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

6.3 Calcolo di serie tramite convergenza puntuale

Metodo risolutivo.

1. Si parte dallo sviluppo di Fourier gia' calcolato e si sceglie il punto t_0 che fa comparire la serie richiesta:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

2. Si calcola il valore $S(t_0)$ con il teorema di convergenza puntuale:

$$S(t_0) = f(t_0) \quad \text{oppure} \quad S(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}.$$

3. Si sostituisce $t = t_0$ nello sviluppo e si isola la serie:

$$S(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt_0) + b_n \sin(nt_0)\big).$$

Esercizi.

1. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t-\pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.1

2. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t-\pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.2

3. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t-\pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.3

4. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = |t|, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.4

5. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t-\pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.5

6. Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \pi - t, \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.6

7. Si consideri la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = 1, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.7

8. Si consideri la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^3 - \pi^2 t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.8

9. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.9

10. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.3.10

6.4 Calcolo di serie tramite l'identita' di Parseval

Metodo risolutivo.

1. Si parte dallo sviluppo di Fourier gia' calcolato:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

2. Si sostituiscono i coefficienti nell'identita' di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

3. Si calcola l'integrale del membro sinistro e si isola la serie numerica che compare nel membro destro:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt.$$

Esercizi.

1. Sia f la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

   Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.1

2. Sia f la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = 1, \qquad 0 < t < \pi.$$

   Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.2

3. Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a, \\ 0, & a < |t| < \pi. \end{cases}$$

   Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{\pi a - a^2}{2}.$$

   Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}.$$

   Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.3

4. Sia f la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^2, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.4

5. Sia f la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = |t|, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.5

6. Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \pi, \end{cases}$$

e prolungata per disparita' su $(-\pi, 0)$. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^2} = \frac{\pi a}{2}.$$

Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.6

7. Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \begin{cases} a - t, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \pi, \end{cases}$$

e prolungata per parita' su $(-\pi, 0)$. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^4} = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^4}{8}.$$

Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.7

8. Sia f la funzione dispari, 2π-periodica, definita da
$$f(t) = t^3, \qquad -\pi < t < \pi.$$
Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval e i risultati gia' noti
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$
calcolare
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.8

9. Sia $a > 0$. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da
$$f(t) = \cosh(at), \qquad -\pi < t < \pi.$$
Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 6.4.9

6.5 Soluzioni degli esercizi

6.5.1 Soluzioni degli esercizi sugli sviluppi di Fourier

Soluzione esercizio 6.2.1 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da
$$f(t) = \begin{cases} 3(\pi^2 - t^2), & -\pi < t < 0, \\ 5(\pi - t)^2, & 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$
Scrivere la serie di Fourier della funzione. Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

Soluzione. Metodo: coefficienti reali della serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$. La funzione non e' pari e non e' dispari, quindi bisogna calcolare tutti i coefficienti a_0, a_n, b_n.

Il coefficiente a_0 e'
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 3(\pi^2 - t^2)\, dt + \int_0^{\pi} 5(\pi - t)^2\, dt\right] = \frac{11\pi^2}{3}. \tag{79}$$
Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 per funzioni 2π-periodiche.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle primitive sui due intervalli di definizione.

Per $n \ge 1$,
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 3(\pi^2 - t^2)\cos(nt)\, dt + \int_0^{\pi} 5(\pi - t)^2 \cos(nt)\, dt\right] \\ &= \frac{2\big(5 - 3(-1)^n\big)}{n^2}. \end{aligned} \tag{80}$$
Prima riga. Formula del coefficiente a_n.
Seconda riga. Integrazione per parti nei due integrali.

Sempre per $n \ge 1$,
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 3(\pi^2 - t^2)\sin(nt)\, dt + \int_0^{\pi} 5(\pi - t)^2 \sin(nt)\, dt\right] \\ &= \frac{2\big(\pi^2 n^2 + 8(-1)^n - 8\big)}{\pi n^3}. \end{aligned} \tag{81}$$

Prima riga. Formula del coefficiente b_n.
Seconda riga. Integrazione per parti nei due integrali.

La serie di Fourier e'

$$S(t) = \frac{11\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2\big(5 - 3(-1)^n\big)}{n^2} \cos(nt) + \frac{2\big(\pi^2 n^2 + 8(-1)^n - 8\big)}{\pi n^3} \sin(nt) \right]. \tag{82}$$

Termine costante. Formula (79).
Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula (80).
Coefficiente di $\sin(nt)$. Formula (81).

Studiamo ora la convergenza puntuale. La funzione e' regolare a tratti, quindi il teorema di Dirichlet garantisce che la serie converge in ogni punto alla media dei limiti laterali periodici.

Nel punto 0 si ha

$$f(0^-) = 3\pi^2, \qquad f(0^+) = 5\pi^2, \qquad S(0) = 4\pi^2. \tag{83}$$

Prima uguaglianza. Limite sinistro in 0.
Seconda uguaglianza. Limite destro in 0.
Terza uguaglianza. Media dei limiti laterali.

Agli estremi dell'intervallo fondamentale bisogna usare la periodicita':

$$f(\pi^-) = 0, \qquad f(-\pi^+) = 0, \qquad S(\pi) = S(-\pi) = 0. \tag{84}$$

Prima uguaglianza. Limite sinistro in π.
Seconda uguaglianza. Limite destro periodico in $-\pi$.
Terza uguaglianza. Media dei limiti laterali periodici.

Pertanto, se $\tau \in (-\pi, \pi]$ e $\tau \equiv t \pmod{2\pi}$, allora

$$S(t) = \begin{cases} 3(\pi^2 - \tau^2), & -\pi < \tau < 0, \\ 4\pi^2, & \tau = 0, \\ 5(\pi - \tau)^2, & 0 < \tau < \pi, \\ 0, & \tau = \pi. \end{cases} \tag{85}$$

Primo caso. Punto di continuita' nel tratto $-\pi < \tau < 0$.
Secondo caso. Formula (83).
Terzo caso. Punto di continuita' nel tratto $0 < \tau < \pi$.
Quarto caso. Formula (84).

Torna all'esercizio 6.2.1

Soluzione esercizio 6.2.3 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, dispari, definita per $0 < t \leq \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier della funzione. Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

Soluzione. Metodo: serie di Fourier di una funzione dispari. Poiche' f e' dispari,

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Restano da calcolare solo i coefficienti b_n.

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} t \sin(nt)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin(nt)\, dt \right] \\ &= \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2}. \end{aligned} \tag{86}$$

Prima riga. Formula del coefficiente b_n per funzioni dispari.
Seconda riga. Integrazione per parti nei due integrali.

La serie di Fourier e'

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2} \sin(nt). \tag{87}$$

Coefficiente di $\sin(nt)$. Formula (86).

La funzione e' continua su tutto il periodo dopo il prolungamento dispari e periodico. Il teorema di Dirichlet garantisce quindi la convergenza puntuale della serie a $f(t)$ in ogni punto.

Se $\tau \in (-\pi, \pi]$ e $\tau \equiv t \pmod{2\pi}$, allora

$$S(t) = \begin{cases} -\pi - \tau, & -\pi < \tau \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \tau, & -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \tau, & \frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \pi. \end{cases} \tag{88}$$

Primo caso. Prolungamento dispari del tratto $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.
Secondo caso. Prolungamento dispari del tratto $0 < t < \frac{\pi}{2}$ e valore $S(0) = 0$.
Terzo caso. Valori assegnati nel tratto $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Torna all'esercizio 6.2.3

Soluzione esercizio 6.2.5 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, pari, definita per $0 \leq t \leq \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 4 - t^2, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ t - \pi, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier della funzione. Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

Soluzione. Metodo: serie di Fourier di una funzione pari. Poiche' f e' pari,

$$b_n = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Restano da calcolare a_0 e a_n.

Il coefficiente a_0 e'

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} (4 - t^2)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (t - \pi)\, dt\right] = 4 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{12}. \tag{89}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 per funzioni pari.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle primitive sui due intervalli di definizione.

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} (4 - t^2)\cos(nt)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (t - \pi)\cos(nt)\, dt\right] \\ &= \frac{\left((16 + 2\pi - \pi^2)n^2 + 8\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4n\left((-1)^n - (\pi + 1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{2\pi n^3}. \end{aligned} \tag{90}$$

Prima riga. Formula del coefficiente a_n per funzioni pari.
Seconda riga. Integrazione per parti nei due integrali.

La serie di Fourier e'

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left((16 + 2\pi - \pi^2)n^2 + 8\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 4n\left((-1)^n - (\pi + 1)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{2\pi n^3} \cos(nt). \end{aligned} \tag{91}$$

Termine costante. Formula (89).

Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula (90).

Studiamo ora la convergenza puntuale. La funzione e' regolare a tratti, quindi il teorema di Dirichlet garantisce la convergenza alla media dei limiti laterali periodici.

Nel punto $\tau = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$f\left(\frac{\pi}{2}^{-}\right) = 4 - \frac{\pi^2}{4}, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}^{+}\right) = -\frac{\pi}{2}, \qquad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}. \tag{92}$$

Prima uguaglianza. Limite sinistro in $\frac{\pi}{2}$.
Seconda uguaglianza. Limite destro in $\frac{\pi}{2}$.
Terza uguaglianza. Media dei limiti laterali.

Per parita' lo stesso valore si ottiene in $-\frac{\pi}{2}$. Se $\tau \in (-\pi, \pi]$ e $\tau \equiv t \pmod{2\pi}$, allora

$$S(t) = \begin{cases} 4 - \tau^2, & |\tau| < \frac{\pi}{2}, \\ 2 - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}, & |\tau| = \frac{\pi}{2}, \\ |\tau| - \pi, & \frac{\pi}{2} < |\tau| \leq \pi. \end{cases} \tag{93}$$

Primo caso. Punti di continuita' nel tratto interno.
Secondo caso. Formula (92).
Terzo caso. Punti di continuita' nel tratto esterno.

Torna all'esercizio 6.2.5

Soluzione esercizio 6.2.7 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, dispari, definita per $0 < t \leq \pi$ da

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 < t < \frac{\pi}{4}, \\ 1 - t, & \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}, \\ -2, & \frac{3\pi}{4} \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier della funzione. Studiare la convergenza puntuale della serie e determinare $S(t)$ in tutti i punti.

Soluzione. Metodo: serie di Fourier di una funzione dispari. Poiche' f e' dispari,

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Restano da calcolare solo i coefficienti b_n.

Per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4} 3\sin(nt)\,dt + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1-t)\sin(nt)\,dt - \int_{3\pi/4}^{\pi} 2\sin(nt)\,dt\right] \\ &= \frac{8(-1)^n + 12 - (8+\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + (3\pi - 12)\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{2\pi n} \\ &\quad + \frac{2}{\pi n^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{94}$$

Prima riga. Formula del coefficiente b_n per funzioni dispari.
Seconda e terza riga. Integrazione per parti nel tratto $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{3\pi}{4}$.

La serie di Fourier e'

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt), \tag{95}$$

Formula (95). Serie di Fourier di una funzione dispari con b_n dato da (94).
Coefficiente di $\sin(nt)$. Formula (94).

Studiamo ora la convergenza puntuale. La funzione e' regolare a tratti, quindi il teorema di Dirichlet garantisce la convergenza alla media dei limiti laterali periodici.

Nei punti di salto positivi si ha

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{8}, \qquad S\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}. \tag{96}$$

Prima uguaglianza. Media dei limiti laterali in $\frac{\pi}{4}$.
Seconda uguaglianza. Media dei limiti laterali in $\frac{3\pi}{4}$.

Per disparita' della serie,

$$S\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2 + \frac{\pi}{8}, \qquad S\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{8}. \tag{97}$$

Prima uguaglianza. Disparita' applicata al valore $S(\frac{\pi}{4})$ in (96).
Seconda uguaglianza. Disparita' applicata al valore $S(\frac{3\pi}{4})$ in (96).

In 0 e agli estremi periodici,

$$S(0) = 0, \qquad S(\pi) = S(-\pi) = 0. \tag{98}$$

Prima uguaglianza. Media dei limiti laterali in 0.
Seconda uguaglianza. Media dei limiti laterali periodici agli estremi.

Se $\tau \in (-\pi, \pi]$ e $\tau \equiv t \pmod{2\pi}$, allora

$$S(t) = \begin{cases} 2, & -\pi < \tau < -\frac{3\pi}{4}, \\ \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{8}, & \tau = -\frac{3\pi}{4}, \\ -1 - \tau, & -\frac{3\pi}{4} < \tau < -\frac{\pi}{4}, \\ -2 + \frac{\pi}{8}, & \tau = -\frac{\pi}{4}, \\ -3, & -\frac{\pi}{4} < \tau < 0, \\ 0, & \tau = 0, \\ 3, & 0 < \tau < \frac{\pi}{4}, \\ 2 - \frac{\pi}{8}, & \tau = \frac{\pi}{4}, \\ 1 - \tau, & \frac{\pi}{4} < \tau < \frac{3\pi}{4}, \\ -\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}, & \tau = \frac{3\pi}{4}, \\ -2, & \frac{3\pi}{4} < \tau < \pi, \\ 0, & \tau = \pi. \end{cases} \tag{99}$$

Primo, terzo, quinto, settimo, nono e undicesimo caso. Punti di continuita'.
Secondo e quarto caso. Formula (97).
Sesto e dodicesimo caso. Formula (98).
Ottavo e decimo caso. Formula (96).

Torna all'esercizio 6.2.7

6.5.2 Soluzioni degli esercizi sul calcolo di serie tramite convergenza puntuale

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier dell'esercizio 6.3.1 Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = (t - \pi)^2, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soluzione. Metodo: calcolo dello sviluppo di Fourier e uso della convergenza puntuale. Poiche' f e' pari, la serie contiene solo coseni:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt), \qquad b_n = 0.$$

Calcoliamo il termine costante:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}. \tag{100}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 per funzioni pari.
Seconda uguaglianza. Calcolo della primitiva.

Per $n \geq 1$, poniamo $u = \pi - t$. Allora

$$\int_0^{\pi} u^2\cos(nu)\,du = \left[\frac{u^2\sin(nu)}{n} + \frac{2u\cos(nu)}{n^2} - \frac{2\sin(nu)}{n^3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}. \tag{101}$$

Prima uguaglianza. Integrazione per parti due volte.
Seconda uguaglianza. Valutazione agli estremi 0 e π.

Quindi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\cos(nt)\,dt = \frac{2(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi}u^2\cos(nu)\,du = \frac{4}{n^2}. \tag{102}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_n per funzioni pari.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $u = \pi - t$.
Terza uguaglianza. Formula (101).

Pertanto

$$(t-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}. \tag{103}$$

Termine costante. Formula (100).
Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula (102).

La funzione e' continua in $t = 0$. Per il teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier, $S(0) = f(0) = \pi^2$.

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Prima uguaglianza. Valutazione di (103) in $t = 0$.
Seconda uguaglianza. Isolamento della serie.

Torna all'esercizio 6.3.1

Soluzione esercizio 6.3.2 Lo sviluppo e'

$$(t-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}.$$

Ponendo $t = \pi$,

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Torna all'esercizio 6.3.2

Soluzione esercizio 6.3.3 Lo sviluppo e'

$$(t-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}.$$

Ponendo $t = \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{4\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} = \frac{\pi^2}{36}.$$

Torna all'esercizio 6.3.3

Soluzione esercizio 6.3.4 Lo sviluppo e'

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Ponendo $t = 0$,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Torna all'esercizio 6.3.4

Soluzione esercizio 6.3.5 Lo sviluppo e'

$$(t-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}.$$

Dai valori in $t = 0$ e in $t = \pi$ si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Torna all'esercizio 6.3.5

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier dell'esercizio 6.3.6 Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \pi - t, \qquad 0 < t < 2\pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}.$$

Soluzione. Metodo: calcolo dello sviluppo di Fourier su $[0, 2\pi]$ e valutazione in un punto di continuita'. Scriviamo

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right).$$

Il coefficiente costante e' nullo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)\, dt = 0. \tag{104}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 su un periodo.
Seconda uguaglianza. Calcolo della primitiva.

Per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)\cos(nt)\, dt = 0. \tag{105}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_n su un periodo.
Seconda uguaglianza. Integrazione per parti e valutazione agli estremi.

Calcoliamo i coefficienti dei seni:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t)\sin(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(\pi - t)\cos(nt)}{n} - \frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{n}. \tag{106}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente b_n su un periodo.
Seconda uguaglianza. Integrazione per parti.
Terza uguaglianza. Valutazione agli estremi 0 e 2π.

Quindi

$$\pi - t = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}, \qquad 0 < t < 2\pi. \tag{107}$$

Coefficiente di $\sin(nt)$. Formula (106).

Il punto $t = \frac{\pi}{3}$ e' un punto di continuita'. Per il teorema di convergenza puntuale, $S(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

$$\frac{2\pi}{3} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n} = \frac{\pi}{3}.$$

Prima uguaglianza. Valutazione di (107) in $t = \frac{\pi}{3}$.
Seconda uguaglianza. Divisione per 2.

Torna all'esercizio 6.3.6

Soluzione esercizio 6.3.7 Lo sviluppo e'

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Ponendo $t = \frac{\pi}{2}$,

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Torna all'esercizio 6.3.7

Soluzione esercizio 6.3.8 Lo sviluppo e'

$$t^3 - \pi^2 t = 12\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nt).$$

Ponendo $t = \frac{\pi}{2}$,

$$-\frac{3\pi^3}{8} = -12\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Torna all'esercizio 6.3.8

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier dell'esercizio 6.3.9 Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^4 - 2\pi^2 t^2, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f e calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Soluzione. Metodo: calcolo dello sviluppo di Fourier di una funzione pari e uso della convergenza puntuale. Poiche' f e' pari,

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt), \qquad b_n = 0.$$

Il coefficiente costante e'

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(t^4 - 2\pi^2 t^2\right)\, dt = -\frac{14\pi^4}{15}. \tag{108}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 per funzioni pari.
Seconda uguaglianza. Calcolo della primitiva.

Per $n \geq 1$, servono i due integrali

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}, \qquad \int_0^{\pi} t^4 \cos(nt)\, dt = \frac{4\pi^3(-1)^n}{n^2} - \frac{24\pi(-1)^n}{n^4}. \tag{109}$$

Prima formula. Integrazione per parti due volte.
Seconda formula. Integrazione per parti quattro volte.

Quindi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(t^4 - 2\pi^2 t^2\right)\cos(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{4\pi^3(-1)^n}{n^2} - \frac{24\pi(-1)^n}{n^4} - 2\pi^2\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right] \\ &= -\frac{48(-1)^n}{n^4}. \end{aligned} \tag{110}$$

Prima riga. Formula del coefficiente a_n per funzioni pari.
Seconda riga. Sostituzione delle formule in (109).
Terza riga. Semplificazione dei termini in $1/n^2$.

Lo sviluppo e' quindi

$$t^4 - 2\pi^2 t^2 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt). \tag{111}$$

Termine costante. Formula (108).
Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula (110).

Agli estremi periodici la funzione non ha salto, perche' $f(\pi^-) = f(-\pi^+) = -\pi^4$. Per il teorema di convergenza puntuale, $S(\pi) = -\pi^4$.

$$-\pi^4 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Prima uguaglianza. Valutazione di (111) in $t = \pi$, con $\cos(n\pi) = (-1)^n$.
Seconda uguaglianza. Isolamento della serie.

Torna all'esercizio 6.3.9

Soluzione esercizio 6.3.10 Lo sviluppo e'

$$t^4 - 2\pi^2 t^2 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nt).$$

Ponendo $t = 0$,

$$0 = -\frac{7\pi^4}{15} - 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

Torna all'esercizio 6.3.10

6.5.3 Soluzioni degli esercizi sul calcolo di serie tramite Parseval

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier e applicazione di Parseval dell'esercizio 6.4.1 Sia f la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soluzione. Metodo: prima si calcolano i coefficienti di Fourier, poi si applica l'identita' di Parseval. La funzione e' dispari, quindi

$$a_0 = 0, \qquad a_n = 0 \qquad n \geq 1.$$

Restano solo i coefficienti b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t\cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned} \tag{112}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente b_n per funzioni dispari.
Seconda uguaglianza. Integrazione per parti di $\int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt$.
Terza uguaglianza. Valutazioni $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Lo sviluppo di Fourier e' quindi

$$t = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt). \tag{113}$$

Formula usata. Coefficiente b_n ottenuto in (112).

Applichiamo ora l'identita' di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2. \tag{114}$$

Identita' di Parseval. Qui $a_0 = 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Calcoliamo i due membri di (114):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2\pi^2}{3}, \qquad b_n^2 = \frac{4}{n^2}.$$

Prima formula. Integrale di una funzione pari.
Seconda formula. Quadrato del coefficiente in (112).

Sostituendo questi valori in (114),

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione dei due membri calcolati sopra in (114).
Seconda uguaglianza. Isolamento della serie.

Torna all'esercizio 6.4.1

Soluzione esercizio 6.4.2 Sia f la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = 1, \qquad 0 < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Soluzione. Lo sviluppo di Fourier e'

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}.$$

Quindi

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}, \qquad b_{2k} = 0.$$

Poiche' $f(t)^2 = 1$ quasi ovunque in $(-\pi, \pi)$, Parseval dà

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}^2, \qquad 2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Torna all'esercizio 6.4.2

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier e applicazione di Parseval dell'esercizio 6.4.3 Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a, \\ 0, & a < |t| < \pi. \end{cases}$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{\pi a - a^2}{2}.$$

Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2}.$$

Soluzione. Metodo: la funzione e' pari, quindi lo sviluppo contiene solo coseni. I coefficienti determinano una somma di quadrati dopo l'applicazione di Parseval.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{2a}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos(nt) \, dt = \frac{2\sin(na)}{\pi n}, \\ b_n &= 0. \end{aligned} \tag{115}$$

Prima riga. Integrale della funzione indicatrice su un intervallo di ampiezza $2a$.
Seconda riga. Formula del coefficiente a_n per funzioni pari.
Terza riga. Parita' della funzione.

Lo sviluppo di Fourier e'

$$f(t) \sim \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(nt). \tag{116}$$

Termine costante. Formula $a_0/2$, con a_0 calcolato in (115).
Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula di a_n in (115).

Poiche' $f(t)^2 = f(t)$ quasi ovunque, si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{2a}{\pi}. \tag{117}$$

Calcolo dell'integrale. La funzione f^2 vale 1 su $(-a, a)$ e 0 altrove.

Applicando l'identita' di Parseval e usando (115) e (117), otteniamo

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2\sin(na)}{\pi n}\right)^2 = \frac{2a^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}.$$

Prima uguaglianza. Identita' di Parseval.
Prima uguaglianza, primo addendo. Sostituzione $a_0 = 2a/\pi$.
Prima uguaglianza, secondo addendo. Sostituzione $a_n = 2\sin(na)/(\pi n)$ e $b_n = 0$.
Seconda uguaglianza. Semplificazione dei quadrati.

Isolando la serie,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{\pi a - a^2}{2}.$$

Con $a = \pi/3$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} = \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi^2}{9}}{2} = \frac{\pi^2}{9}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $a = \pi/3$ nella formula generale appena ottenuta.

Torna all'esercizio 6.4.3

Soluzione completa con calcolo dello sviluppo di Fourier e applicazione di Parseval dell'esercizio 6.4.4 Sia f la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^2, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Soluzione. Metodo: calcoliamo lo sviluppo di Fourier di t^2, poi applichiamo Parseval a $f^2 = t^4$. La funzione e' pari, quindi

$$b_n = 0 \qquad n \geq 1.$$

Il coefficiente costante e'

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2\pi^2}{3}. \tag{118}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_0 per funzioni pari.

Per a_n, integriamo due volte per parti:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned} \tag{119}$$

Prima uguaglianza. Formula del coefficiente a_n per funzioni pari.
Seconda uguaglianza. Valore $\int_0^\pi t^2 \cos(nt)\,dt = 2\pi(-1)^n/n^2$, ottenuto per integrazione per parti.

Lo sviluppo di Fourier e'

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt). \tag{120}$$

Termine costante. Formula $a_0/2$, con a_0 calcolato in (118).
Coefficiente di $\cos(nt)$. Formula (119).

Applichiamo Parseval allo sviluppo (120):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2. \tag{121}$$

Identita' di Parseval. Qui $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$.

Calcoliamo i termini in (121):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{2\pi^4}{5}, \qquad \frac{a_0^2}{2} = \frac{2\pi^4}{9}, \qquad a_n^2 = \frac{16}{n^4}.$$

Prima formula. Integrale di una funzione pari.
Seconda formula. Sostituzione $a_0 = 2\pi^2/3$, ottenuto in (118).
Terza formula. Quadrato del coefficiente $a_n = 4(-1)^n/n^2$, ottenuto in (119).

Sostituendo in (121),

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione dei tre termini calcolati sopra.
Seconda uguaglianza. Isolamento della serie.

Torna all'esercizio 6.4.4

Soluzione esercizio 6.4.5 Sia f la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = |t|, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Soluzione. Lo sviluppo di Fourier e'

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}.$$

Quindi

$$a_0 = \pi, \qquad a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \qquad a_{2k} = 0.$$

Per Parseval,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}^2.$$

Dunque

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Torna all'esercizio 6.4.5

Soluzione esercizio 6.4.6 Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \pi, \end{cases}$$

e prolungata per disparita' su $(-\pi, 0)$. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^2} = \frac{\pi a}{2}.$$

Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^2}.$$

Soluzione. La funzione e' dispari, quindi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a \sin(nt)\,dt = \frac{2(1-\cos(na))}{\pi n}.$$

Lo sviluppo di Fourier e'

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(na)}{n}\sin(nt).$$

Poiche' $f(t)^2 = 1$ su $(-a, a)$ e 0 altrove, Parseval dà

$$\frac{2a}{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^2}.$$

Pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^2} = \frac{\pi a}{2}.$$

Con $a = \pi/2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Torna all'esercizio 6.4.6

Soluzione esercizio 6.4.7 Sia $0 < a < \pi$. Si consideri la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = \begin{cases} a-t, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \pi, \end{cases}$$

e prolungata per parita' su $(-\pi, 0)$. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^4} = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^4}{8}.$$

Dedurre il valore di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4}.$$

Soluzione. La funzione e' pari, quindi $b_n = 0$. I coefficienti sono

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a (a-t)\,dt = \frac{a^2}{\pi}, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^a (a-t)\cos(nt)\,dt = \frac{2(1-\cos(na))}{\pi n^2}.$$

Lo sviluppo di Fourier e'

$$f(t) \sim \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos(na)}{n^2} \cos(nt).$$

Poiche'

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^a (a-t)^2 \, dt = \frac{2a^3}{3\pi},$$

Parseval dà

$$\frac{2a^3}{3\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\pi} \right)^2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^4}.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(na))^2}{n^4} = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^4}{8}.$$

Con $a = \pi/2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2}{n^4} = \frac{5\pi^4}{384}.$$

Torna all'esercizio 6.4.7

Soluzione esercizio 6.4.8 Sia f la funzione dispari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = t^3, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval e i risultati gia' noti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Soluzione. La funzione e' dispari. Il suo sviluppo di Fourier e'

$$t^3 = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{6}{n^3} \right) \sin(nt).$$

Quindi

$$b_n = 2(-1)^{n+1} \left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{6}{n^3} \right).$$

Per Parseval,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^6 \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2.$$

Cioe'

$$\frac{2\pi^6}{7} = 4\pi^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 48\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + 144 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Sostituendo i valori noti,

$$\frac{2\pi^6}{7} = \frac{2\pi^6}{15} + 144 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Torna all'esercizio 6.4.8

Soluzione esercizio 6.4.9 Sia $a > 0$. Si consideri la funzione pari, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \cosh(at), \qquad -\pi < t < \pi.$$

Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di f. Usando l'identita' di Parseval, calcolare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2}.$$

Soluzione. La funzione e' pari, quindi $b_n = 0$. I coefficienti sono

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(at)\, dt = \frac{2\sinh(a\pi)}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(at)\cos(nt)\, dt = \frac{2a\sinh(a\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}.$$

Lo sviluppo di Fourier e'

$$\cosh(at) = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2a\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \cos(nt).$$

Applicando Parseval e isolando la serie si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2} = \frac{\pi\coth(\pi a)}{4a^3} + \frac{\pi^2}{4a^2\sinh^2(\pi a)} - \frac{1}{2a^4}.$$

Torna all'esercizio 6.4.9

7 Trasformate di Fourier

7.1 Introduzione

La trasformata di Fourier permette di descrivere una funzione nel dominio delle frequenze. L'idea e' decomporre una funzione $f(t)$ come sovrapposizione di oscillazioni elementari $e^{i\omega t}$, misurando quanto ogni frequenza ω contribuisce alla funzione.

In queste note useremo la convenzione

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt.$$

Con questa scelta, quando l'inversione e' valida,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Il fattore 2π compare quindi nella formula inversa. Compare anche nelle formule di convoluzione e prodotto.

7.2 Proprieta' operative

Nelle formule seguenti si assume che le funzioni siano sufficientemente regolari e integrabili per rendere lecite le operazioni indicate.

1. **Linearita'.**
$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}.$$

2. **Traslazione nel tempo.**
$$\mathcal{F}\{f(t - a)\}(\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

3. **Modulazione.**
$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega - \omega_0).$$

4. **Cambiamento di scala.** Per $a \neq 0$,
$$\mathcal{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

5. **Derivazione nel tempo.** Se i termini al bordo sono nulli,
$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega),$$
e piu' in generale
$$\mathcal{F}\{f^{(m)}(t)\}(\omega) = (i\omega)^m\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

6. **Moltiplicazione per potenze di t.**
$$\mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega),$$
e piu' in generale
$$\mathcal{F}\{t^m f(t)\}(\omega) = i^m\frac{d^m}{d\omega^m}\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

7. **Derivazione in frequenza.** Se $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$, allora
$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{-itf(t)\}(\omega).$$

8. **Convoluzione.** Con
$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,ds,$$
si ha
$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)\mathcal{F}\{g\}(\omega).$$

9. **Prodotto.**
$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}\right)(\omega).$$

10. **Parita' e realita'.** Se f e' reale e pari, allora $\widehat{f}$ e' reale e pari. Se f e' reale e dispari, allora $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

11. **Riemann-Lebesgue.** Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}$ e' continua, limitata e
$$\lim_{|\omega|\to+\infty}\widehat{f}(\omega) = 0.$$

12. **Regolarita' della trasformata.** Se $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $0 \leq k \leq m$, allora $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R})$.

13. **Decadimento della trasformata.** Se $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$, allora
$$\omega^m\widehat{f}(\omega) \to 0 \qquad (|\omega| \to +\infty).$$

14. **Plancherel.** Con questa convenzione,
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$$

15. **Supporto compatto e analiticita'.** Se f ha supporto compatto, allora $\widehat{f}$ ammette un prolungamento olomorfo a tutto il piano complesso. Piu' precisamente, se $\operatorname{supp} f \subset [-a, a]$, allora la crescita di $\widehat{f}(z)$ e' controllata da $e^{a|\operatorname{Im} z|}$.

7.3 Trasformate notevoli

Nella tabella seguente si usa la convenzione fissata sopra. Le formule con $a, b > 0$ valgono sotto le ipotesi indicate.

1. **Gaussiana.**
$$\mathcal{F}\{e^{-t^2}\}(\omega) = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4}.$$

2. **Gaussiana riscalata.**
$$\mathcal{F}\{e^{-at^2}\}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}, \qquad a > 0.$$

3. **Esponenziale bilatero.**
$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \qquad a > 0.$$

4. **Lorentziana.**
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \qquad a > 0.$$

5. **Lorentziana quadratica.**
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{2a^3}\,(a|\omega| + 1)\, e^{-a|\omega|}, \qquad a > 0.$$

6. **Prodotto di due lorentziane.** Se $a \neq b$,
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a^2 - b^2}\left(\frac{e^{-a|\omega|}}{a} - \frac{e^{-b|\omega|}}{b}\right).$$

7. **Polo semplice nel semipiano superiore.** Per $a > 0$,
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t - ia}\right\}(\omega) = 2\pi i\, e^{a\omega} H(-\omega),$$
dove H e' la funzione di Heaviside.

8. **Polo semplice nel semipiano inferiore.** Per $a > 0$,
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t + ia}\right\}(\omega) = -2\pi i\, e^{-a\omega} H(\omega).$$

9. **Polo reale in valore principale.** Se $a \in \mathbb{R}$, allora in senso di valore principale
$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{v.\,p.}\,\frac{1}{t - a}\right\}(\omega) = -i\pi e^{-ia\omega}\,\mathrm{sgn}(\omega).$$
Senza valore principale la trasformata non e' definita come integrale improprio ordinario, perche' il polo appartiene all'asse reale.

10. **Quartica simmetrica.**
$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^4 + a^4}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a^3\sqrt{2}} e^{-a|\omega|/\sqrt{2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{a|\omega|}{\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{a|\omega|}{\sqrt{2}}\right)\right], \qquad a > 0.$$

11. **Indicatrice di un intervallo simmetrico.**
$$\mathcal{F}\{\chi_{[-a,a]}(t)\}(\omega) = \frac{2\sin(a\omega)}{\omega}, \qquad a > 0.$$
Nel punto $\omega = 0$ il valore si intende per continuita': $2a$.

12. **Indicatrice di un intervallo generico.**

$$\mathcal{F}\{\chi_{[\alpha,\beta]}(t)\}(\omega) = \frac{e^{-i\alpha\omega} - e^{-i\beta\omega}}{i\omega}.$$

13. **Impulso triangolare.**

$$\mathcal{F}\{(a - |t|)\chi_{[-a,a]}(t)\}(\omega) = \frac{2(1 - \cos(a\omega))}{\omega^2}, \qquad a > 0.$$

Nel punto $\omega = 0$ il valore si intende per continuita': a^2.

14. **Gradino dispari compatto.**

$$\mathcal{F}\{-\chi_{[-a,0]}(t) + \chi_{[0,a]}(t)\}(\omega) = -2i\frac{1 - \cos(a\omega)}{\omega}, \qquad a > 0.$$

15. **Seno cardinale.** In senso improprio,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(at)}{t}\right\}(\omega) = \pi\,\chi_{[-a,a]}(\omega), \qquad a > 0,$$

con valore medio nei punti $\omega = \pm a$.

16. **Quadrato del seno cardinale.**

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right\}(\omega) = \pi\left(a - \frac{|\omega|}{2}\right)\chi_{[-2a,2a]}(\omega), \qquad a > 0.$$

17. **Esponenziale monolatero.** Per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\{e^{-at}\chi_{[0,+\infty)}(t)\}(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}.$$

18. **Esponenziale monolatero traslato.** Per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\{e^{-a(t-t_0)}\chi_{[t_0,+\infty)}(t)\}(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{a + i\omega}.$$

19. **Funzione segno smorzata.**

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{-2i\omega}{a^2 + \omega^2}, \qquad a > 0.$$

20. **Seno cardinale smorzato.**

$$\mathcal{F}\left\{e^{-|t|}\frac{\sin t}{t}\right\}(\omega) = \arctan(1 + \omega) + \arctan(1 - \omega).$$

21. **Delta di Dirac.** In senso distribuzionale,

$$\mathcal{F}\{\delta(t - a)\}(\omega) = e^{-i\omega a}.$$

22. **Esponenziale puro.** In senso distribuzionale,

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t}\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

23. **Costante.** In senso distribuzionale,

$$\mathcal{F}\{1\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

7.4 Proprieta' qualitative della trasformata di Fourier

In questa categoria non e' richiesto, salvo diversa indicazione, il calcolo esplicito di $\widehat{f}$. L'obiettivo e' dedurre le principali proprieta' della trasformata a partire dalle proprieta' qualitative di f.

Per ogni funzione bisogna studiare la trasformata di Fourier con la convenzione

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Richiamo su L^1 e L^2. Dire che $f \in L^1(\mathbb{R})$ significa dire che f e' integrabile in valore assoluto:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < +\infty.$$

Dire che $f \in L^2(\mathbb{R})$ significa dire che f e' a quadrato integrabile:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt < +\infty.$$

Per verificare queste proprieta' si controllano separatamente i punti in cui la funzione puo' essere singolare e il comportamento per $|t| \to +\infty$. Una funzione limitata e a supporto compatto appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ sia a $L^2(\mathbb{R})$. Se invece il supporto non e' compatto, si usa il confronto asintotico: per esempio

$$|f(t)| \sim \frac{C}{|t|^p} \quad (|t| \to +\infty)$$

porta a $f \in L^1(\mathbb{R})$ quando $p > 1$, mentre porta a $f \in L^2(\mathbb{R})$ quando $2p > 1$. In presenza di decadimento esponenziale, prodotti con potenze di t restano integrabili. In presenza di oscillazioni, invece, per L^1 bisogna controllare il valore assoluto: la cancellazione oscillatoria non basta per l'integrabilita' assoluta.

Metodo risolutivo.

1. Si stabilisce in quale senso esiste la trasformata:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad f \in L^2(\mathbb{R}), \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

   Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}$ e' una funzione continua, limitata e infinitesima all'infinito:

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad |\widehat{f}(\omega)| \le \|f\|_{L^1}.$$

   Inoltre

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

2. Si controllano le proprieta' L^2. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e vale Plancherel:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi\|f\|_{L^2}^2.$$

3. Si studia la regolarita' di $\widehat{f}$ tramite i momenti di f. Se

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}), \qquad k = 0, \dots, n,$$

   allora

$$\widehat{f} \in C^n(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}^{(k)}(\omega) = (-i)^k \widehat{t^k f}(\omega).$$

   In particolare $\widehat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R})$ quando $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

4. Si studia il decadimento di $\widehat{f}$ tramite le derivate di f. Se
$$f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}),$$
in senso classico o debole, allora
$$\omega^n \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}(\omega) = o\left(\frac{1}{|\omega|^n}\right).$$

5. Si controllano le proprieta' L^2 delle derivate. Se $t^n f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, allora
$$\widehat{f}^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}).$$
Se $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$, allora
$$\omega^n \widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}).$$

6. Si riconoscono supporto compatto, regolarita' a tratti e simmetrie. Se $\operatorname{supp} f \subseteq [-a, a]$, allora $\widehat{f}$ si estende a una funzione intera e soddisfa una stima del tipo
$$|\widehat{f}(z)| \leq Ce^{a|\operatorname{Im} z|}.$$
Se f ha salti, allora il decadimento atteso e' dell'ordine di $1/\omega$ e in generale non ci si aspetta $\widehat{f} \in L^1$. Se f e' reale pari, allora $\widehat{f}$ e' reale pari; se f e' reale dispari, allora $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

7. Si decide se la formula di inversione e' garantita. Una condizione sufficiente utile negli esercizi e'
$$f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}).$$
In questo caso l'inversione vale nei punti di continuita' di f. Quando una proprieta' non e' deducibile dalle sole informazioni su f, bisogna dichiarare che servono una stima piu' fine oppure il calcolo esplicito di $\widehat{f}$.

Esercizi.

1. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.1

2. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = (1 - t^2)\chi_{[-1,1]}(t).$$

3. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = (2 - |t|)\chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.3

4. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-3|t|}.$$

5. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = te^{-2|t|}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.5

6. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = H(t)e^{-t}.$$
7. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.7
8. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}.$$
9. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.9
10. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-t^2}.$$
11. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{\sin t}{t},$$
prolungata per continuita' in $t = 0$. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.11
12. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+|t|}}.$$
13. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{1}{1+|t|}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.13
14. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \operatorname{sgn}(t)e^{-4|t|}.$$
15. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-2|t|}\cos(3t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.4.15
16. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = i\,te^{-t^2}.$$

17. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-\pi,\pi]}(t) \sin t.$$

18. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-2,-1]}(t) - \chi_{[1,2]}(t).$$

19. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = 1.$$

20. Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = e^{2it}.$$

7.5 Calcolo diretto di trasformate a supporto compatto

In questa classe rientrano funzioni nulle fuori da un intervallo limitato: indicatori, polinomi a tratti, finestre trigonometriche e combinazioni finite di questi oggetti.

Metodo risolutivo.

1. Si usa la definizione riducendo l'integrale al supporto:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\operatorname{supp} f} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Se f e' pari o dispari, usare rispettivamente

$$\widehat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\, dt, \qquad \widehat{f}(\omega) = -2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\, dt.$$

2. Se f e' definita a tratti, si spezza l'integrale:

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_j \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f_j(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

3. Durante il calcolo bisogna indicare eventuali valori di ω esclusi dai passaggi algebrici. Per esempio, se si divide per ω, la formula ottenuta e' valida inizialmente solo per $\omega \neq 0$. Se si divide per $\omega - a$, la formula e' valida inizialmente solo per $\omega \neq a$.

4. Nei valori esclusi si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t}\, dt.$$

In particolare, per $\omega_0 = 0$,

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

5. Infine si puo' calcolare il limite della formula trovata per $\omega \neq \omega_0$:

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \widehat{f}(\omega).$$

Se il limite coincide con il valore ottenuto dalla definizione, allora il punto ω_0 era solo una singolarita' eliminabile della formula esplicita.

Esercizi.

1. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.1

2. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = (2 - |t|)\chi_{[-2,2]}(t).$$

3. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = t\,\chi_{[-1,1]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.3

4. Calcolare $\widehat{f}$, dove f e' pari e, per $t \geq 0$,
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

5. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = t\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\chi_{[-1,1]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.5

6. Calcolare $\widehat{f}$, dove f e' pari e, per $t \geq 0$,
$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 4, & 2 < t \leq 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

7. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = 2t\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.7

8. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = -\chi_{[-3,-1)}(t) + (1+t)\chi_{[-1,0)}(t) + (1-t)\chi_{[0,1)}(t) - \chi_{(1,3]}(t).$$

9. Calcolare $\widehat{f}$, dove f e' pari e, per $t \geq 0$,
$$f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4, & 1 < t \leq 3, \\ 6-t, & 3 < t \leq 6, \\ 0, & t > 6. \end{cases}$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.9

10. Calcolare $\widehat{f}$, dove f e' pari e, per $t \geq 0$,
$$f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 6, & 2 < t \leq 4, \\ 10-t, & 4 < t \leq 7, \\ 0, & t > 7. \end{cases}$$

11. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = 3t \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.11

12. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = -5t \cos^2\left(\frac{\pi t}{10}\right) \chi_{[-5,5]}(t).$$

13. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = 2\chi_{[-4,-2)}(t) + (-1-2t)\chi_{[-2,0)}(t) + (-1+2t)\chi_{[0,2)}(t) + 2\chi_{(2,4]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.13

14. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = -2\chi_{[-6,-3)}(t) + (3+t)\chi_{[-3,0)}(t) + (3-t)\chi_{[0,3)}(t) - 2\chi_{(3,6]}(t).$$

15. Verificare che f e' $\mathcal{F}$-trasformabile, indicare le principali proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla esplicitamente, dove
$$f(t) = 3(t+3)\chi_{[-3,-1]}(t) + (1-t)\chi_{[-1,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.15

16. Studiare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$ e poi calcolarla, dove
$$f(t) = -(t+2)\chi_{[-3,0]}(t) + (t-2)\chi_{[0,3]}(t).$$

17. Verificare che $f \in L^1(\mathbb{R})$, determinare le principali proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolare $\widehat{f}(\omega)$, dove
$$f(t) = \sin(2t)\chi_{[0,\pi]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.17

18. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\chi_{[-3,0]}(t) - \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\chi_{[0,3]}(t).$$

19. Studiare a priori regolarita' e decadimento di $\widehat{f}$, poi calcolarla esplicitamente, dove
$$f(t) = (t+4)^2\chi_{[-4,-2]}(t) + 3\chi_{(-2,2)}(t) + (t-4)^2\chi_{[2,4]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.5.19

20. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = t(t+3)\chi_{[-3,0]}(t).$$

21. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = t(t-3)\chi_{[0,3]}(t).$$

22. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = (16-t^2)\chi_{[-4,0]}(t) + (t^2-16)\chi_{[0,4]}(t).$$

23. Verificare che f e' Fourier-trasformabile, studiare a priori $\widehat{f}$ e calcolarla, dove
$$f(t) = 2t\chi_{[-1,1]}(t) + 3\chi_{[-2,-1]}(t) - 3\chi_{[1,2]}(t).$$

24. Studiare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$, con particolare attenzione a parita' e regolarita', e calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = (16 - t^2)\chi_{[-4,4]}(t).$$

25. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \begin{cases} 3+t, & -3 \leq t < -1, \\ 2, & -1 \leq t \leq 1, \\ 3-t, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

26. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

27. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-\pi,\pi]}(t) \sin^2(2t).$$

28. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = t \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \chi_{[-3,3]}(t).$$

29. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = e^{-|t|}\chi_{[-2,2]}(t).$$

30. Calcolare la trasformata di Fourier di f, al variare di $a > 0$, dove

$$f(t) = t\left(4a^2 - t^2\right)\chi_{[-2a,2a]}(t).$$

31. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t \leq -1, \\ -2t, & -1 < t < 1, \\ t-2, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

32. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = -\chi_{[-3,-1]}(t)(3+t) + \chi_{[1,3]}(t)(3-t) - t\chi_{(-1,1)}(t).$$

7.6 Calcolo tramite tabelle e proprieta' operative

In questa categoria gli esercizi richiedono l'uso combinato delle trasformate notevoli e delle proprieta' operative della trasformata di Fourier.

Esercizi.

1. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \log\left(\frac{t+i}{t-i}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.1

2. Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = 2\log\left[\frac{(t+2i)(t-4i)}{(t-2i)(t+4i)}\right].$$

3. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-2t}\chi_{[0,+\infty)}(t) - e^{2t}\chi_{(-\infty,0]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.3

4. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{t^2+9}.$$

5. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = -3\log\left[\frac{(t+i)(t+4i)(t-6i)}{(t-i)(t-4i)(t+6i)}\right].$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.5

6. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = 4\log\left[\frac{(t+3i)(t-7i)}{(t-3i)(t+7i)}\right].$$

7. Utilizzando le tabelle e le proprieta' operative, calcolare la trasformata di Fourier di
$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(e^{-x^2} - 3e^{-9x^2}\right) dx.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.7

8. Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \frac{e^{-3|t|} - e^{-5|t|}}{t}.$$

9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione pari definita da
$$f(t) = (1+3|t|)e^{-3|t|}.$$
Verificare che f e' Fourier-trasformabile e calcolare $\widehat{f}$. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.9

10. Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-6|t|}(1+2t^2)\sin(4t).$$

11. Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-5|t|}(2-3t^2)\cos(2t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.11

12. Sia
$$G(t) = tH(-t).$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare le trasformate di Fourier dei segnali
$$u(t) = G(t-\alpha)e^{2(t-\alpha)}, \qquad v(t) = G(t-\alpha)e^{2t}, \qquad w(t) = G(t)e^{2t-\alpha}.$$

13. Si considerino
$$f_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t}\right), \qquad f_2(t) = H(-t)te^{3t-6}.$$
Verificare che $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare $\widehat{f_1}$ e $\widehat{f_2}$. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.13

14. Dopo aver verificato che f e' Fourier-trasformabile, determinare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla esplicitamente, dove
$$f(t) = H(t)te^{-3t}\cos(2t).$$

15. Verificare che f e' Fourier-trasformabile e calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = te^{-2|t|}\cos(3t).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.15

16. Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, studiare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla usando le tabelle, dove
$$f(t) = e^{-8|t|}(1 + 5t^2)\sin(2t).$$

17. Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, studiare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla, dove
$$f(t) = e^{-6|t|}(3 - 4t^2)\cos(5t).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.17

18. Calcolare la trasformata di Fourier di
$$f(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\sin^2(2\tau)}{\tau^2}\,d\tau.$$

19. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \ln(1 + t^2) - \ln(9 + t^2).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.19

20. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \chi_{[-6,6]}(t)\ln\left(\frac{|t|}{6}\right), \qquad t \neq 0.$$

21. Si consideri
$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{4}{t^2}\right), \qquad t \neq 0.$$

Scrivere l'equazione differenziale soddisfatta da $\widehat{f}$. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.21

22. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \log\left[\frac{(t + 3i)(t - 5i)}{(t - 3i)(t + 5i)}\right].$$

23. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = \ln\left(\frac{25 + t^2}{4 + t^2}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.23

24. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = e^{-4|t|}(1 - 2t^2)\sin(5t).$$

25. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = H(-t)(t - 1)e^{2t}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.6.25

26. Calcolare $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = H(t)t^2e^{-2t}\sin(3t).$$

7.7 Razionali reali traslati e modulati

In questa categoria compaiono funzioni razionali reali con denominatori quadratici senza zeri reali, eventualmente traslati, moltiplicati per esponenziali complessi, seni, coseni o loro potenze.

Esercizi.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{e^{2it}}{(t-1)^2+4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.1

2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos(3t)}{t^2+16}.$$

3. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\sin(2t)}{(t+2)^2+9}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.3

4. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos(4t)}{(t-3)^2+25}.$$

5. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1-\sin(2t)}{(t-4)^2+9}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.5

6. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1-\cos(3t)}{(t+3)^2+16}.$$

7. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos(t-4)}{(t-4)^2+16}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.7

8. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\sin^2(2t)}{(t+5)^2+36}.$$

9. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos^2(3t)}{(t-2)^2+25}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.9

10. Dopo aver verificato che f e' Fourier-trasformabile, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{e^{4it}}{(t-6)^2+49}.$$

Utilizzando il risultato ottenuto, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left((t-6)^2+49\right)^2}\,dt.$$

11. Dopo aver verificato che f e' Fourier-trasformabile, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{\cos(2t)}{(t+4)^2+16}.$$

Utilizzando Plancherel, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2t)}{\left((t+4)^2+16\right)^2}\,dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.11

12. Dopo aver verificato che f e' Fourier-trasformabile, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{\sin(5t)}{(t-1)^2+9}.$$

Utilizzando il risultato ottenuto, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left((t-1)^2+9\right)^2}\,dt.$$

13. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1+\cos(2t)-\sin(3t)}{(t+2)^2+4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.13

14. Sia $a>0$ e $c \in \mathbb{R}$. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{e^{i\alpha t}}{(t-c)^2+a^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

15. Siano $a>0$, $c\in\mathbb{R}$ e $\beta>0$. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos(\beta t)}{(t-c)^2+a^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.7.15

16. Siano $a>0$, $c\in\mathbb{R}$ e $\beta>0$. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\sin^2(\beta t)}{(t-c)^2+a^2}.$$

7.8 Antitrasformata e teorema di inversione

In questa categoria viene assegnata direttamente $\widehat{f}$ e si richiede di determinare f usando il teorema di inversione, con la convenzione

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

Esercizi.

1. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\omega^2+4},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.1

2. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\omega+2i},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

3. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{2}{\omega^2+4},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.3

4. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\omega-3i},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

5. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\omega^2+9},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.5

6. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\chi_{[-2,2]}(\omega),$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

7. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{6}{\omega^2+9},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.7

8. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(\omega)e^{-2\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

9. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\chi_{[-5,5]}(\omega),$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.9

10. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(-\omega)e^{3\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

11. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega+2i)^2},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.11

12. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(\omega)e^{-5\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

13. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega-4i)^2},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.13

14. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(-\omega)e^{6\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

15. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega+2i)(\omega+3i)},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.15

16. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(\omega)\omega e^{-2\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

17. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega-2i)(\omega-5i)},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.17

18. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(-\omega)(-\omega)e^{2\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

19. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega+2i)(\omega-3i)},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f. Vai alla soluzione dell'esercizio 7.8.19

20. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(\omega)\omega e^{-4\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

21. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\chi_{[1,4]}(\omega),$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

22. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{(\omega-4i)(\omega+i)},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

23. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=H(-\omega)(-\omega)e^{5\omega},$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

24. Per $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da
$$\widehat{f}(\omega)=\chi_{[-3,-1]}(\omega),$$
calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

7.9 Convoluzioni tramite trasformata di Fourier

Questa categoria raccoglie esercizi in cui la convoluzione viene calcolata passando alla trasformata di Fourier. Sono inclusi indicatori, esponenziali troncati, razionali complessi e prodotti riconducibili al teorema di convoluzione.

Esercizi.

1. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \chi_{[-1,3]}(t) * \chi_{[-2,2]}(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.9.1

2. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \chi_{[0,3]}(t) * \chi_{[-4,-1]}(t).$$

3. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = e^{-2|t|} * e^{-5|t|}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.9.3

4. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = e^{-3|t|} * e^{-6|t|}.$$

5. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \left(e^{2t}H(-t)\right) * \left(e^{-3t}H(t)\right).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.9.5

6. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \left(e^{4t}H(-t)\right) * \left(e^{-t}H(t)\right).$$

7. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \frac{1}{t+2i} * \frac{1}{t^2+9}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.9.7

8. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \frac{1}{4-it} * \frac{1}{2+it}.$$

9. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \frac{1}{t+5i} * \frac{1}{(t+2i)^2}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 7.9.9

10. Sia
$$f(t) = |t|\chi_{[-2,2]}(t).$$
Verificare che f e' Fourier-trasformabile, calcolare $\widehat{f}$ e determinare
$$\left(|t|\chi_{[-2,2]}(t)\right) * \chi_{[-1,1]}(t).$$

11. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t)=\frac{\sin(3t)}{t}\,\frac{\sin(5t)}{t},$$

intendendo f prolungata con continuita' in $t=0$.

12. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t)=(2-|t|)_+ * e^{-4|t|}.$$

7.10 Calcolo di integrali tramite Plancherel

In questa categoria si richiede di calcolare integrali reali riconducendoli alla formula di Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega,$$

con la convenzione

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Esercizi.

1. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione pari definita da

$$f(t)=(1+3|t|)e^{-3|t|}.$$

Verificare che f e' Fourier-trasformabile, calcolare $\widehat{f}$ e, usando il teorema di Plancherel, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+9)^4}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.1

2. Si considerino

$$f_1(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t}\right),\qquad f_2(t)=H(-t)te^{3t-6}.$$

Verificare che $f_1,f_2\in L^2(\mathbb{R})$, calcolare $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_2$ e usare Plancherel per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(t)|^2\,dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.2

3. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+4}\,dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.3

4. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+25}\,dt.$$

5. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\,dt,\qquad a>0.$$

6. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2t)}{t}\right)^2 dt.$$

7. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(5t)}{t}\right)^2 dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.7

8. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(3\omega)}{\omega}\right)^2 d\omega.$$

9. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(at)}{t}\right)^2 dt, \qquad a > 0.$$

10. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)^2}\, dt.$$

11. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+9)^2}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.11

12. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\, dt, \qquad a > 0.$$

13. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+4)^2}\, dt.$$

14. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+9)^2}\, dt.$$

15. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.15

16. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+16)}\, dt.$$

17. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\, dt, \qquad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

18. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} \frac{\sin(4t)}{t}\, dt.$$

19. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t} \frac{\sin(7t)}{t}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.19

20. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\omega)}{\omega} \frac{\sin(6\omega)}{\omega}\, d\omega.$$

21. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\omega)}{\omega} \frac{\sin(9\omega)}{\omega}\, d\omega.$$

22. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} \frac{\sin(bt)}{t}\, dt, \qquad a, b > 0.$$

Discutere il risultato nei casi $a < b$, $a = b$, $a > b$.

23. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(4\omega) - \sin(2\omega)}{\omega} \right)^2 d\omega.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.23

24. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\sin(5\omega) - 2\sin(2\omega)}{\omega} \right)^2 d\omega.$$

25. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+4)(t^2+25)}\, dt.$$

26. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\, dt, \qquad a, b > 0, \quad a \neq b.$$

27. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^4 d\omega.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.27

28. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\right)^4 d\omega.$$

29. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\right)^4 d\omega, \qquad a > 0.$$

30. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(2t)}{t^2(t^2+9)}\, dt.$$

31. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(3t)}{t^2(t^2+4)}\, dt.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 7.10.31

32. Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(at)}{t^2(t^2+b^2)}\, dt, \qquad a, b > 0.$$

7.11 Soluzioni degli esercizi

7.11.1 Proprieta' qualitative della trasformata di Fourier

Soluzione esercizio 7.4.1 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. La funzione e' misurabile, reale, pari e a supporto compatto. Inoltre

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Il supporto e' limitato e f e' limitata.

Quindi

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}), \qquad |\widehat{f}(\omega)| \le \|f\|_{L^1} = 4.$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza proprieta'. Stima elementare della trasformata per funzioni in L^1.

Il valore in zero e'

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-2}^{2} 1\, dt = 4.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.
Seconda uguaglianza. Supporto di f.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Sul supporto $[-2,2]$, la funzione $t^k f(t)$ e' limitata.

Di conseguenza

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Il supporto e' contenuto in $[-2, 2]$. Dunque $\widehat{f}$ si estende a una funzione intera e

$$|\widehat{f}(z)| \le 4e^{2|\operatorname{Im} z|}.$$

Supporto compatto e analiticita'. Tipo esponenziale 2.

La funzione f ha salti in $t = -2$ e in $t = 2$. Quindi non si puo' dedurre decadimento rapido tramite derivate L^1: in senso distribuzionale

$$f' = \delta_{-2} - \delta_2.$$

Derivata debole. La derivata non e' una funzione di $L^1(\mathbb{R})$.

Il decadimento atteso e' quindi dell'ordine di $1/\omega$, e in particolare non ci si aspetta $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Infatti una trasformata in L^1 darebbe, tramite inversione, una funzione continua, mentre f ha discontinuita' di salto.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

La formula di inversione non e' garantita dalla condizione sufficiente $\widehat{f} \in L^1$. E' invece valida nel senso usuale per funzioni a variazione limitata: nei punti di continuita' restituisce $f(t)$, mentre nei punti di salto restituisce il valore medio dei limiti laterali.

Torna all'esercizio 7.4.1

Soluzione esercizio 7.4.3 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = (2 - |t|)\chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, continua e a supporto compatto. Inoltre

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Il supporto e' limitato e f e' limitata.

Quindi

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore in zero e'

$$\widehat{f}(0) = \int_{-2}^{2} (2 - |t|)\, dt = 4.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Funzione limitata su supporto compatto.

Ne segue

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Il supporto e' contenuto in $[-2, 2]$. Quindi $\widehat{f}$ si estende a una funzione intera e soddisfa una stima del tipo

$$|\widehat{f}(z)| \le Ce^{2|\operatorname{Im} z|}.$$

Supporto compatto e analiticita'. Tipo esponenziale 2.

La funzione e' assolutamente continua e

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -2 < t < 0, \\ -1, & 0 < t < 2, \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

Derivata classica a tratti.

In particolare
$$f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. La derivata e' limitata e a supporto compatto.

Quindi
$$\omega \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \omega \widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione con $f' \in L^1$.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione con $f' \in L^2$.

La seconda derivata, in senso distribuzionale, contiene masse di Dirac nei punti angolosi $t = -2, 0, 2$. Dunque non e' una funzione di L^1 o di L^2. Per questa via non si puo' dedurre decadimento di ordine superiore.

Poiche' f e' reale pari,
$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

In questo caso il decadimento e' abbastanza forte da garantire $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Una giustificazione qualitativa e' che f e' continua, lineare a tratti e ha derivata a variazione limitata; quindi il decadimento atteso e' dell'ordine di $1/\omega^2$. Pertanto la formula di inversione e' garantita nei punti di continuita', cioe' in ogni punto.

Torna all'esercizio 7.4.3

Soluzione esercizio 7.4.5 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove
$$f(t) = te^{-2|t|}.$$

Soluzione. La funzione e' reale, dispari e ha decadimento esponenziale. Quindi
$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

Ne segue
$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore in zero e'
$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-2|t|}\, dt = 0.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.
Seconda uguaglianza. Integrale di una funzione dispari su $\mathbb{R}$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$,
$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Il fattore esponenziale domina ogni potenza.

Quindi
$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

La funzione e' C^1, ma non e' C^2 in $t = 0$. Si ha comunque
$$f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \qquad f'' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Derivate deboli. La seconda derivata e' una funzione a tratti con salto in 0.

Invece la terza derivata debole contiene una massa di Dirac in 0, quindi non e' una funzione di L^1 o di L^2. Pertanto
$$\omega^2 \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

ma da questo controllo non si deduce la stessa proprieta' per $\omega^3 \widehat{f}$. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

Poiche' f e' reale dispari,

$$\widehat{f} \text{ e' immaginaria pura e dispari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

La funzione non ha supporto compatto, quindi non si puo' dedurre che $\widehat{f}$ sia intera. Inoltre la presenza di $|t|$ impedisce un'estensione olomorfa di f a una striscia complessa intorno all'asse reale.

Poiche' $\omega^2 \widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, si ha in particolare $\widehat{f}(\omega) = o(|\omega|^{-2})$. Quindi $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e la formula di inversione e' garantita in tutti i punti, essendo f continua.

Torna all'esercizio 7.4.5

Soluzione esercizio 7.4.7 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, positiva e razionale senza poli reali. Inoltre

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto asintotico. Per $|t| \to +\infty$, $f(t) \sim t^{-2}$.

Quindi

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore in zero e'

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.

Per i momenti in L^1,

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \iff k = 0.$$

Criterio del confronto asintotico. Per $|t| \to +\infty$, $t^k f(t) \sim t^{k-2}$.

Da questo criterio si deduce solo

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}),$$

ma non si deduce $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ usando i momenti L^1. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Per i momenti in L^2,

$$t^k f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \iff k = 0, 1.$$

Criterio del confronto asintotico. Il quadrato si comporta come t^{2k-4}.

Quindi

$$\widehat{f}' \in L^2(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}'' \notin L^2(\mathbb{R}) \quad \text{per questo criterio.}$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza in L^2.

Le derivate di f sono tutte razionali e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto asintotico. Ogni derivata aumenta il decadimento algebrico.

Pertanto

$$\omega^n \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

La funzione non ha supporto compatto, quindi non si deduce che $\widehat{f}$ sia intera. Tuttavia f e' olomorfa nella striscia

$$|\operatorname{Im} z| < 1,$$

con poli sul bordo nei punti $z = i$ e $z = -i$. Ci si aspetta quindi decadimento esponenziale dell'ordine di $e^{-|\omega|}$. Analiticita' in striscia e decadimento esponenziale.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

Il decadimento ottenuto dalle derivate implica, per esempio, che $\widehat{f}(\omega) = o(|\omega|^{-2})$. Quindi $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, e la formula di inversione e' garantita in ogni punto, essendo f continua.

Torna all'esercizio 7.4.7

Soluzione esercizio 7.4.9 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, positiva e liscia. Inoltre

$$f(t) \sim \frac{1}{|t|^3} \qquad (|t| \to +\infty).$$

Confronto asintotico.

Quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. All'infinito si confronta con $1/|t|^3$.

Ne segue

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore in zero e'

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = 2.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.
Seconda uguaglianza. Primitiva $t/\sqrt{1+t^2}$.

Per i momenti in L^1,

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \iff k = 0, 1.$$

Criterio del confronto asintotico. Per $|t| \to +\infty$, $t^k f(t) \sim |t|^{k-3}$.

Da questo criterio si ottiene

$$\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}' \in C_0(\mathbb{R}).$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Non si deduce $\widehat{f} \in C^2(\mathbb{R})$ con il criterio dei momenti L^1, perche' $t^2 f(t) \notin L^1(\mathbb{R})$.

Per i momenti in L^2,

$$t^k f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \iff k = 0, 1, 2.$$

Criterio del confronto asintotico. Il quadrato si comporta come $|t|^{2k-6}$.

Quindi

$$\widehat{f}^{(k)} \in L^2(\mathbb{R}), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza in L^2.

Le derivate di f hanno decadimento algebrico sempre piu' forte; in particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto asintotico.

Pertanto

$$\omega^n \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

La funzione non ha supporto compatto, quindi non si deduce che $\widehat{f}$ sia intera. La funzione ammette pero' un'estensione olomorfa alla striscia

$$|\operatorname{Im} z| < 1,$$

con singolarita' sui bordi $z = i$ e $z = -i$. Ci si aspetta quindi un decadimento esponenziale collegato alla distanza 1 delle singolarita' dall'asse reale. Analiticita' in striscia e decadimento esponenziale.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

Dal decadimento $\omega^2 \widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R})$ segue che $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. La formula di inversione e' quindi garantita in ogni punto, essendo f continua.

Torna all'esercizio 7.4.9

Soluzione esercizio 7.4.11 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{\sin t}{t},$$

prolungata per continuita' in $t = 0$.

Soluzione. Il prolungamento in $t = 0$ e' continuo, reale e pari. La funzione non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Infatti, su opportuni sottointervalli di ogni periodo, $|\sin t|$ e' separato da zero, e quindi

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty.$$

Criterio del confronto dal basso. Il confronto produce la serie armonica.

Invece

$$f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Vicino a 0 la funzione e' limitata; per $|t| \geq 1$, $|f(t)|^2 \leq 1/t^2$.

La trasformata non e' quindi garantita come integrale assolutamente convergente. Esiste pero' come trasformata in senso L^2, e quindi

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Non si puo' usare la formula

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$$

come formula L^1, perche' $f \notin L^1(\mathbb{R})$. L'integrale improprio di Dirichlet esiste, ma non e' un integrale assolutamente convergente. Distinzione tra convergenza impropria e appartenenza a L^1.

Per i momenti in L^1,

$$t^k f(t) \notin L^1(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Criterio del valore assoluto. Le oscillazioni non bastano per l'integrabilita' assoluta.

Per i momenti in L^2,

$$t^k f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \iff k = 0.$$

Criterio del confronto. All'infinito $|t^k f(t)|^2$ ha ordine medio $|t|^{2k-2}$.

Da questi criteri non si deduce regolarita' di $\widehat{f}$ tramite momenti di f. Si deduce solo $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Le derivate di f sono a quadrato integrabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. All'infinito le derivate sono combinazioni oscillanti con decadimento dell'ordine di $1/t$.

Quindi

$$\omega^n \widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione in L^2.

Usando la trasformata notevole dell'indicatrice,

$$\widehat{f}(\omega) = \pi\chi_{[-1,1]}(\omega) \quad \text{quasi ovunque.}$$

Trasformata notevole. Inversione della formula $\mathcal{F}\{\chi_{[-1,1]}\}(\omega) = 2\sin\omega/\omega$.

Questa formula conferma che $\widehat{f}$ non e' una funzione continua, ma appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

La formula di inversione non segue dalla condizione $f \in L^1$, che e' falsa. Segue invece dalla forma esplicita della trasformata e vale nel senso usuale nei punti di continuita' di f, cioe' in ogni punto.

Torna all'esercizio 7.4.11

Soluzione esercizio 7.4.13 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{1}{1+|t|}.$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, positiva e continua. Non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, perche'

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+|t|} = +\infty.$$

Criterio del confronto. Divergenza logaritmica all'infinito.

Invece

$$f \in L^2(\mathbb{R}),$$

poiche'

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{(1+|t|)^2}.$$

Criterio del confronto. All'infinito si confronta con $1/t^2$.

La trasformata non e' quindi definita come integrale assolutamente convergente. Esiste come trasformata in senso L^2, e

$$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore $\widehat{f}(0)$ non e' definito tramite l'integrale di f, perche'

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = +\infty.$$

Definizione di $\widehat{f}(0)$ per funzioni in L^1.

Per i momenti,

$$t^k f(t) \notin L^1(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e

$$t^k f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow k = 0.$$

Prima proprieta'. Criterio del confronto asintotico con $|t|^{k-1}$.
Seconda proprieta'. Criterio del confronto asintotico con $|t|^{2k-2}$.

Quindi, tramite i momenti di f, non si deduce regolarita' di $\widehat{f}$ ne' appartenenza di $\widehat{f}'$ a $L^2(\mathbb{R})$.

La derivata debole di f e' la funzione

$$f'(t) = -\frac{\operatorname{sgn}(t)}{(1+|t|)^2} \qquad (t \neq 0).$$

Derivata debole. La funzione f e' continua in 0, quindi non compare una delta.

Si ha

$$f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. All'infinito $f'(t)$ ha ordine $1/t^2$.

Pertanto

$$\omega\widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

La seconda derivata debole contiene una massa di Dirac in 0, dovuta al salto di f'. Quindi non e' una funzione di L^1 o di L^2, e da questo controllo non si deduce decadimento di ordine superiore.

La funzione non ha supporto compatto e non ammette un'estensione olomorfa a una striscia complessa, a causa della presenza di $|t|$. Quindi non si deduce analiticita' intera di $\widehat{f}$, ne' decadimento esponenziale.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari}$$

nel senso L^2. Simmetria della trasformata di Fourier.

La formula di inversione non e' garantita dalla condizione sufficiente

$$f \in L^1(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}),$$

perche' gia' la prima condizione e' falsa. Si puo' usare invece l'inversione in senso L^2.

Torna all'esercizio 7.4.13

Soluzione esercizio 7.4.15 Studiare le proprieta' qualitative di $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = e^{-2|t|}\cos(3t).$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, continua e ha decadimento esponenziale. Quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Il fattore $e^{-2|t|}$ domina $|\cos(3t)|$.

Ne segue

$$\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Prima proprieta'. Lemma di Riemann-Lebesgue.
Seconda proprieta'. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Il valore in zero e'

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}\cos(3t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos(3t)\,dt = \frac{4}{13}.$$

Prima uguaglianza. Definizione di $\widehat{f}(0)$.
Seconda uguaglianza. Parita' dell'integranda.
Terza uguaglianza. Integrale elementare $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\,dt = a/(a^2+b^2)$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. Il decadimento esponenziale domina ogni potenza.

Quindi

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

La funzione e' continua, ma non e' C^1 in $t = 0$. La derivata debole prima e' una funzione e soddisfa

$$f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. La derivata e' combinazione di esponenziali decadenti e funzioni trigonometriche.

La seconda derivata debole contiene una massa di Dirac in 0, dovuta al salto della derivata prima. Pertanto

$$\omega\widehat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

ma da questo controllo non si deduce la stessa proprieta' per $\omega^2\widehat{f}$. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

La trasformata e' anche calcolabile esplicitamente usando la tabella di $e^{-2|t|}$ e la modulazione:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{4+(\omega-3)^2} + \frac{2}{4+(\omega+3)^2}.$$

Trasformata notevole e modulazione. Si usa $\cos(3t) = (e^{3it} + e^{-3it})/2$.

La formula esplicita conferma che

$$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto. All'infinito la trasformata ha ordine $1/\omega^2$.

La funzione f non ha supporto compatto, quindi non si deduce che $\widehat{f}$ sia intera. Inoltre la presenza di $|t|$ impedisce un'estensione olomorfa di f a una striscia complessa intorno all'asse reale.

Poiche' f e' reale pari,

$$\widehat{f} \text{ e' reale pari.}$$

Simmetria della trasformata di Fourier.

Poiche' $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, la formula di inversione e' garantita in ogni punto, essendo f continua.

Torna all'esercizio 7.4.15

7.11.2 Calcolo diretto di trasformate a supporto compatto

Soluzione esercizio 7.5.1 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier. Poiche' f e' reale, pari e a supporto compatto, la trasformata e' reale e pari.

Per $\omega \neq 0$,

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-2}^{2} e^{-i\omega t}\,dt = 2\int_0^2 \cos(\omega t)\,dt = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata di Fourier e supporto di f.
Seconda uguaglianza. Parita' dell'integranda.
Terza uguaglianza. Calcolo della primitiva.

Nel punto $\omega = 0$ si usa la definizione:

$$\widehat{f}(0) = \int_{-2}^{2} 1\,dt = 4.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.

D'altra parte,

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{2\sin(2\omega)}{\omega} = 4.$$

Limite notevole. $\sin(2\omega) \sim 2\omega$ per $\omega \to 0$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0, \\ 4, & \omega = 0. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.1

Soluzione esercizio 7.5.3 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = t\,\chi_{[-1,1]}(t).$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione f e' reale, dispari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

Per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-1}^{1} te^{-i\omega t}\,dt = -2i\int_0^1 t\sin(\omega t)\,dt = -2i\left(-\frac{\cos\omega}{\omega} + \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right)\\ &= 2i\left(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right) = \frac{2i(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata di Fourier e supporto di f.
Seconda uguaglianza. Parte reale nulla per disparita' di $t\cos(\omega t)$; parte immaginaria pari per $t\sin(\omega t)$.
Terza uguaglianza. Integrazione per parti in $\int_0^1 t\sin(\omega t)\,dt$.

Nel punto $\omega = 0$,

$$\widehat{f}(0) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.

Inoltre,

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{2i(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^2} = 0.$$

Sviluppo asintotico. $\omega\cos\omega - \sin\omega = -\frac{\omega^3}{3} + o(\omega^3)$ per $\omega \to 0$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases}\dfrac{2i(\omega\cos\omega - \sin\omega)}{\omega^2}, & \omega \neq 0,\\ 0, & \omega = 0.\end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.3

Soluzione esercizio 7.5.5 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = t\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\chi_{[-1,1]}(t).$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione f e' reale, dispari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

Poniamo

$$\Phi_1(\xi) = \int_0^1 t\sin(\xi t)\,dt = \begin{cases}\dfrac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^2}, & \xi \neq 0,\\ 0, & \xi = 0.\end{cases} \tag{122}$$

Prima uguaglianza. Definizione di Φ_1.
Seconda uguaglianza. Per $\xi \neq 0$, integrazione per parti; per $\xi = 0$, valore dalla definizione.

Allora

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= -2i\int_0^1 t\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin(\omega t)\,dt\\ &= -i\int_0^1 t(1-\cos(\pi t))\sin(\omega t)\,dt\\ &= -i\left[\Phi_1(\omega) - \frac{1}{2}\Phi_1(\omega+\pi) - \frac{1}{2}\Phi_1(\omega-\pi)\right].\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula per trasformate di funzioni reali dispari.
Seconda uguaglianza. Identita' trigonometrica: formula di duplicazione, $\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1-\cos(\pi t)}{2}$.
Terza uguaglianza. Identita' trigonometrica: prostaferesi, $\cos(\pi t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\sin((\omega+\pi)t) + \frac{1}{2}\sin((\omega-\pi)t)$.

Terza uguaglianza. Formula (122).

I valori in cui la formula razionale di Φ_1 contiene divisioni per zero sono $\omega = 0, \pi, -\pi$. Dalla definizione di Φ_1 si ottiene

$$\widehat{f}(0) = 0, \qquad \widehat{f}(\pi) = -\frac{5i}{4\pi}, \qquad \widehat{f}(-\pi) = \frac{5i}{4\pi}.$$

Valori esclusi. Formula (122), con $\Phi_1(0) = 0$.

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = -i\left[\Phi_1(\omega) - \frac{1}{2}\Phi_1(\omega+\pi) - \frac{1}{2}\Phi_1(\omega-\pi)\right]}$$

Risultato. La funzione Φ_1 e' definita in (122).

Torna all'esercizio 7.5.5

Soluzione esercizio 7.5.7 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = 2t\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione f e' reale, dispari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

Poniamo

$$\Phi_2(\xi) = \int_0^2 t\sin(\xi t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\xi) - 2\xi\cos(2\xi)}{\xi^2}, & \xi \neq 0, \\ 0, & \xi = 0. \end{cases} \tag{123}$$

Prima uguaglianza. Definizione di Φ_2.
Seconda uguaglianza. Per $\xi \neq 0$, integrazione per parti; per $\xi = 0$, valore dalla definizione.

Allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= -4i\int_0^2 t\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\sin(\omega t)\,dt \\ &= -2i\int_0^2 t\left(1+\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\sin(\omega t)\,dt \\ &= -2i\left[\Phi_2(\omega) + \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula per trasformate di funzioni reali dispari.
Seconda uguaglianza. Identita' trigonometrica: formula di duplicazione, $\cos^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{2}$.
Terza uguaglianza. Identita' trigonometrica: prostaferesi applicata a $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin(\omega t)$.
Terza uguaglianza. Formula (123).

I valori in cui la formula razionale di Φ_2 contiene divisioni per zero sono $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$. Dalla definizione di Φ_2 si ottiene

$$\widehat{f}(0) = 0, \qquad \widehat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6i}{\pi}, \qquad \widehat{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6i}{\pi}.$$

Valori esclusi. Formula (123), con $\Phi_2(0) = 0$.

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = -2i\left[\Phi_2(\omega) + \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Risultato. La funzione Φ_2 e' definita in (123).

Torna all'esercizio 7.5.7

Soluzione esercizio 7.5.9 Calcolare $\widehat{f}$, dove f e' pari e, per $t \geq 0$,

$$f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4, & 1 < t \leq 3, \\ 6 - t, & 3 < t \leq 6, \\ 0, & t > 6. \end{cases}$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione e' reale, pari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' reale e pari.

Per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= 2\left[\int_0^1 4t\cos(\omega t)\,dt + \int_1^3 4\cos(\omega t)\,dt + \int_3^6 (6-t)\cos(\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{2\sin(3\omega)}{\omega} + \frac{8\cos\omega + 2\cos(3\omega) - 2\cos(6\omega) - 8}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Prima riga. Formula per trasformate di funzioni reali pari e scomposizione sui tre intervalli di definizione.
Seconda riga. Calcolo delle primitive nei tre intervalli.

Nel punto $\omega = 0$ si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(0) = 2\left[\int_0^1 4t\,dt + \int_1^3 4\,dt + \int_3^6 (6-t)\,dt\right] = 29.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle tre aree.

Inoltre

$$\lim_{\omega \to 0}\left[\frac{2\sin(3\omega)}{\omega} + \frac{8\cos\omega + 2\cos(3\omega) - 2\cos(6\omega) - 8}{\omega^2}\right] = 29.$$

Sviluppo asintotico. $\frac{2\sin(3\omega)}{\omega} = 6 + o(1)$ e $8\cos\omega + 2\cos(3\omega) - 2\cos(6\omega) - 8 = 23\omega^2 + o(\omega^2)$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(3\omega)}{\omega} + \dfrac{8\cos\omega + 2\cos(3\omega) - 2\cos(6\omega) - 8}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 29, & \omega = 0. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.9

Soluzione esercizio 7.5.11 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = 3t\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione f e' reale, dispari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' immaginaria pura e dispari.

Poniamo

$$\Phi_2(\xi) = \int_0^2 t\sin(\xi t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\xi) - 2\xi\cos(2\xi)}{\xi^2}, & \xi \neq 0, \\ 0, & \xi = 0. \end{cases} \tag{124}$$

Prima uguaglianza. Definizione di Φ_2.
Seconda uguaglianza. Per $\xi \neq 0$, integrazione per parti; per $\xi = 0$, valore dalla definizione.

Allora

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= -6i\int_0^2 t\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\sin(\omega t)\,dt \\ &= -3i\int_0^2 t\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)\sin(\omega t)\,dt \\ &= -3i\left[\Phi_2(\omega) - \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula per trasformate di funzioni reali dispari.

Seconda uguaglianza. Identita' trigonometrica: formula di duplicazione, $\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{2}$.
Terza uguaglianza. Identita' trigonometrica: prostaferesi applicata a $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin(\omega t)$.
Terza uguaglianza. Formula (124).

I valori in cui la formula razionale di Φ_2 contiene divisioni per zero sono $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$. Dalla definizione di Φ_2 si ottiene

$$\widehat{f}(0) = 0, \qquad \widehat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15i}{\pi}, \qquad \widehat{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15i}{\pi}.$$

Valori esclusi. Formula (124), con $\Phi_2(0) = 0$.

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = -3i\left[\Phi_2(\omega) - \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi_2\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Risultato. La funzione Φ_2 e' definita in (124).

Torna all'esercizio 7.5.11

Soluzione esercizio 7.5.13 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 2\chi_{[-4,-2)}(t) + (-1-2t)\chi_{[-2,0)}(t) \\ & + (-1+2t)\chi_{[0,2)}(t) + 2\chi_{(2,4]}(t). \end{aligned}$$

Soluzione. Metodo: definizione della trasformata di Fourier e parita'. La funzione e' reale, pari e a supporto compatto; quindi $\widehat{f}$ e' reale e pari.

Per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= 2\left[\int_0^2 (-1+2t)\cos(\omega t)\,dt + \int_2^4 2\cos(\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \frac{4\sin(4\omega)}{\omega} + \frac{4\cos(2\omega)-4}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Prima riga. Formula per trasformate di funzioni reali pari e scomposizione sui due intervalli di definizione.
Seconda riga. Calcolo delle primitive nei due intervalli.

Nel punto $\omega = 0$ si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(0) = 2\left[\int_0^2 (-1+2t)\,dt + \int_2^4 2\,dt\right] = 12.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle due aree.

Inoltre

$$\lim_{\omega\to 0}\left[\frac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \frac{4\sin(4\omega)}{\omega} + \frac{4\cos(2\omega)-4}{\omega^2}\right] = 12.$$

Sviluppo asintotico. Singolarita' eliminabile in $\omega = 0$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \dfrac{4\sin(4\omega)}{\omega} + \dfrac{4\cos(2\omega)-4}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ 12, & \omega = 0. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.13

Soluzione esercizio 7.5.15 Verificare che f e' $\mathcal{F}$-trasformabile, indicare le principali proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla esplicitamente, dove

$$f(t) = 3(t+3)\chi_{[-3,-1]}(t) + (1-t)\chi_{[-1,2]}(t).$$

Soluzione. La funzione e' a supporto compatto e limitata. Quindi $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed e' $\mathcal{F}$-trasformabile.

Proprieta' a priori: $\widehat{f}$ e' continua, infinitamente derivabile, $\widehat{f}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$, e $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$, perche' f e' reale. La funzione non e' pari e non e' dispari, quindi non si prevede una trasformata puramente reale o puramente immaginaria.

Per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-3}^{-1} 3(t+3)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{2} (1-t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{4ie^{i\omega}}{\omega} - \frac{ie^{-2i\omega}}{\omega} - \frac{3e^{3i\omega}}{\omega^2} + \frac{4e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-2i\omega}}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Prima riga. Definizione della trasformata di Fourier e scomposizione sui due intervalli di definizione.
Seconda riga. Calcolo delle primitive nei due intervalli.

Nel punto $\omega = 0$ si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(0) = \int_{-3}^{-1} 3(t+3)\,dt + \int_{-1}^{2} (1-t)\,dt = \frac{15}{2}.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle due aree algebriche.

Inoltre

$$\lim_{\omega \to 0} \left[\frac{4ie^{i\omega}}{\omega} - \frac{ie^{-2i\omega}}{\omega} - \frac{3e^{3i\omega}}{\omega^2} + \frac{4e^{i\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-2i\omega}}{\omega^2}\right] = \frac{15}{2}.$$

Sviluppo asintotico. Singolarita' eliminabile in $\omega = 0$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4ie^{i\omega}}{\omega} - \dfrac{ie^{-2i\omega}}{\omega} - \dfrac{3e^{3i\omega}}{\omega^2} + \dfrac{4e^{i\omega}}{\omega^2} - \dfrac{e^{-2i\omega}}{\omega^2}, & \omega \neq 0, \\ \dfrac{15}{2}, & \omega = 0. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.15

Soluzione esercizio 7.5.17 Verificare che $f \in L^1(\mathbb{R})$, determinare le principali proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolare $\widehat{f}(\omega)$, dove

$$f(t) = \sin(2t)\chi_{[0,\pi]}(t).$$

Soluzione. La funzione ha supporto compatto ed e' limitata. Quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

Proprieta' a priori: $\widehat{f}$ e' continua, infinitamente derivabile, $\widehat{f}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$, e $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$, perche' f e' reale. La funzione non e' pari e non e' dispari.

Per $\omega \neq \pm 2$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_0^{\pi} \sin(2t)e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2i}\left[\int_0^{\pi} e^{-i(\omega-2)t}\,dt - \int_0^{\pi} e^{-i(\omega+2)t}\,dt\right] \\ &= \frac{2(1-e^{-i\pi\omega})}{4-\omega^2}.\end{aligned}$$

Prima riga. Definizione della trasformata di Fourier e supporto di f.

Seconda riga. Identita' trigonometrica: formule di Eulero.
Terza riga. Calcolo delle primitive esponenziali.

Nei valori esclusi si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(2) = \int_0^\pi \sin(2t)e^{-2it}\,dt = -\frac{i\pi}{2}, \qquad \widehat{f}(-2) = \int_0^\pi \sin(2t)e^{2it}\,dt = \frac{i\pi}{2}.$$

Prima e terza espressione. Definizione della trasformata nei punti $\omega = 2$ e $\omega = -2$.
Seconda e quarta espressione. Calcolo diretto degli integrali.

Inoltre

$$\lim_{\omega\to 2} \frac{2(1-e^{-i\pi\omega})}{4-\omega^2} = -\frac{i\pi}{2}, \qquad \lim_{\omega\to -2} \frac{2(1-e^{-i\pi\omega})}{4-\omega^2} = \frac{i\pi}{2}.$$

Sviluppo asintotico. Singolarita' eliminabili in $\omega = 2$ e $\omega = -2$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2(1-e^{-i\pi\omega})}{4-\omega^2}, & \omega \neq \pm 2, \\ -\dfrac{i\pi}{2}, & \omega = 2, \\ \dfrac{i\pi}{2}, & \omega = -2. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.17

Soluzione esercizio 7.5.19 Studiare a priori regolarita' e decadimento di $\widehat{f}$, poi calcolarla esplicitamente, dove

$$f(t) = (t+4)^2\chi_{[-4,-2]}(t) + 3\chi_{(-2,2)}(t) + (t-4)^2\chi_{[2,4]}(t).$$

Soluzione. La funzione e' reale, pari, limitata e a supporto compatto. Quindi $\widehat{f}$ e' reale, pari, continua e

$$\widehat{f}(\omega) \to 0 \qquad \text{per } |\omega| \to +\infty.$$

Lemma di Riemann-Lebesgue.

Inoltre $t^m f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, perche' f ha supporto compatto. Dunque

$$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

La funzione ha salti in $t = \pm 2$, quindi dal calcolo diretto ci si aspetta un decadimento dell'ordine $O(1/|\omega|)$.

Per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= 2\left[\int_0^2 3\cos(\omega t)\,dt + \int_2^4 (t-4)^2\cos(\omega t)\,dt\right] \\ &= -\frac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \frac{8\cos(2\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(2\omega) - 4\sin(4\omega)}{\omega^3}. \end{aligned}$$

Prima riga. Formula per trasformate di funzioni reali pari e scomposizione sui due intervalli di definizione.
Seconda riga. Calcolo delle primitive nei due intervalli.

Nel punto $\omega = 0$ si torna alla definizione:

$$\widehat{f}(0) = 2\left[\int_0^2 3\,dt + \int_2^4 (t-4)^2\,dt\right] = \frac{52}{3}.$$

Prima uguaglianza. Definizione della trasformata nel punto $\omega = 0$.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle due aree.

Inoltre

$$\lim_{\omega\to 0}\left[-\frac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \frac{8\cos(2\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(2\omega) - 4\sin(4\omega)}{\omega^3}\right] = \frac{52}{3}.$$

Sviluppo asintotico. Singolarita' eliminabile in $\omega = 0$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{2\sin(2\omega)}{\omega} + \dfrac{8\cos(2\omega)}{\omega^2} + \dfrac{4\sin(2\omega) - 4\sin(4\omega)}{\omega^3}, & \omega \neq 0, \\ \dfrac{52}{3}, & \omega = 0. \end{cases}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.5.19

7.11.3 Calcolo tramite tabelle e proprieta' operative

Soluzione esercizio 7.6.1 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \log\left(\frac{t+i}{t-i}\right).$$

Soluzione. Metodo: deriviamo la funzione e poi usiamo la proprieta' di derivazione della trasformata di Fourier. La trasformata e' intesa in senso distribuzionale.

Per $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i} = -\frac{2i}{t^2+1}.$$

Prima uguaglianza. Derivata del logaritmo sul ramo scelto.

Passando alla trasformata,

$$i\omega\widehat{f}(\omega) = -2i\,\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+1}\right\}(\omega) = -2i\pi e^{-|\omega|}.$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.
Seconda uguaglianza. Tabella $\mathcal{F}\{(t^2+1)^{-1}\} = \pi e^{-|\omega|}$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = -2\pi \text{ pv}\left(\frac{e^{-|\omega|}}{\omega}\right).$$

Risultato. Il simbolo pv indica il valore principale distribuzionale.

Torna all'esercizio 7.6.1

Soluzione esercizio 7.6.3 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = e^{-2t}\chi_{[0,+\infty)}(t) - e^{2t}\chi_{(-\infty,0]}(t).$$

Soluzione. Metodo: tabella delle esponenziali su semirette.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \mathcal{F}\{H(t)e^{-2t}\}(\omega) - \mathcal{F}\{H(-t)e^{2t}\}(\omega) \\ &= \frac{1}{2+i\omega} - \frac{1}{2-i\omega} = -\frac{2i\omega}{\omega^2+4}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Scomposizione della funzione sulle due semirette.
Seconda uguaglianza. Tabelle $\mathcal{F}\{H(t)e^{-at}\} = \frac{1}{a+i\omega}$ e $\mathcal{F}\{H(-t)e^{at}\} = \frac{1}{a-i\omega}$, con $a = 2$.
Terza uguaglianza. Semplificazione razionale.

$$\widehat{f}(\omega) = -\frac{2i\omega}{\omega^2+4}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.6.3

Soluzione esercizio 7.6.5 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = -3 \log \left[\frac{(t+i)(t+4i)(t-6i)}{(t-i)(t-4i)(t+6i)} \right].$$

Soluzione. Metodo: linearita' e formula ottenuta per i logaritmi del tipo $\log \frac{t+ia}{t-ia}$. La trasformata e' intesa in senso distribuzionale.

Per $a > 0$,

$$\mathcal{F}\left\{ \log \left(\frac{t+ia}{t-ia} \right) \right\} (\omega) = -2\pi \ \mathrm{pv} \left(\frac{e^{-a|\omega|}}{\omega} \right). \tag{125}$$

Formula. Si ottiene derivando il logaritmo e usando $\mathcal{F}\{(t^2+a^2)^{-1}\} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$.

Il logaritmo assegnato si riscrive come

$$f(t) = -3 \left[\log \left(\frac{t+i}{t-i} \right) + \log \left(\frac{t+4i}{t-4i} \right) - \log \left(\frac{t+6i}{t-6i} \right) \right].$$

Riscrittura. Il fattore $\frac{t-6i}{t+6i}$ e' il reciproco di $\frac{t+6i}{t-6i}$.

Applicando (125),

$$\widehat{f}(\omega) = 6\pi \ \mathrm{pv} \left(\frac{e^{-|\omega|} + e^{-4|\omega|} - e^{-6|\omega|}}{\omega} \right).$$

Risultato. Trasformata di Fourier: linearita'.

Torna all'esercizio 7.6.5

Soluzione esercizio 7.6.7 Utilizzando le tabelle e le proprieta' operative, calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(e^{-x^2} - 3e^{-9x^2} \right) dx.$$

Soluzione. Metodo: si trasforma la derivata di f. Poiche'

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-x^2} - 3e^{-9x^2} \right) dx = \sqrt{\pi} - 3\frac{\sqrt{\pi}}{3} = 0,$$

la funzione f tende a 0 sia per $t \to -\infty$, sia per $t \to +\infty$.

Si ha

$$f'(t) = e^{-t^2} - 3e^{-9t^2}.$$

Derivata di una funzione definita tramite integrale.

Passando alla trasformata,

$$\begin{aligned} i\omega \widehat{f}(\omega) &= \mathcal{F}\{e^{-t^2}\}(\omega) - 3\mathcal{F}\{e^{-9t^2}\}(\omega) \\ &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} - \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/36}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: trasformata della gaussiana.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{i\omega} \left(e^{-\omega^2/4} - e^{-\omega^2/36} \right), & \omega \neq 0, \\ 0, & \omega = 0. \end{cases}$$

Valore in $\omega = 0$. La singolarita' e' eliminabile, perche' il numeratore e' $O(\omega^2)$.

Torna all'esercizio 7.6.7

Soluzione esercizio 7.6.9 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione pari definita da

$$f(t) = (1 + 3|t|)e^{-3|t|}.$$

Verificare che f e' Fourier-trasformabile e calcolare $\widehat{f}$.

Soluzione. La funzione e' continua, pari e ha decadimento esponenziale. Quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

Partiamo dalla tabella

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \qquad a > 0.$$

Derivando rispetto al parametro a,

$$\mathcal{F}\{|t|e^{-a|t|}\}(\omega) = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{2a}{a^2 + \omega^2}\right) = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}.$$

Derivazione sotto il segno di integrale.

Per $a = 3$,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 9} + 3\frac{2(9 - \omega^2)}{(\omega^2 + 9)^2} = \frac{108}{(\omega^2 + 9)^2}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $a = 3$ nelle due tabelle precedenti.

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{108}{(\omega^2 + 9)^2}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.6.9

Soluzione esercizio 7.6.11 Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = e^{-5|t|}(2 - 3t^2)\cos(2t).$$

Soluzione. La funzione ha decadimento esponenziale, quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

Poniamo

$$A(\xi) = \mathcal{F}\{e^{-5|t|}\}(\xi) = \frac{10}{25 + \xi^2}.$$

Tabella $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$, con $a = 5$.

Allora

$$\mathcal{F}\{t^2 e^{-5|t|}\}(\xi) = -A''(\xi) = \frac{500 - 60\xi^2}{(25 + \xi^2)^3}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Quindi, se $g(t) = e^{-5|t|}(2 - 3t^2)$,

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{20(\xi^4 + 59\xi^2 + 550)}{(25 + \xi^2)^3}.$$

Prima uguaglianza. Combinazione $2e^{-5|t|} - 3t^2 e^{-5|t|}$.

Poiche' $f(t) = g(t)\cos(2t)$,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\widehat{g}(\omega - 2) + \frac{1}{2}\widehat{g}(\omega + 2).$$

Trasformata di Fourier: modulazione.

Pertanto

$$\widehat{f}(\omega) = 10\left[\frac{(\omega - 2)^4 + 59(\omega - 2)^2 + 550}{(25 + (\omega - 2)^2)^3} + \frac{(\omega + 2)^4 + 59(\omega + 2)^2 + 550}{(25 + (\omega + 2)^2)^3}\right].$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.6.11

Soluzione esercizio 7.6.13 Si considerino

$$f_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t}\right), \qquad f_2(t) = H(-t)te^{3t-6}.$$

Verificare che $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare $\widehat{f_1}$ e $\widehat{f_2}$.

Soluzione. La funzione $\frac{\sin(3t)}{t}$ ha trasformata a supporto compatto; quindi, dopo modulazione e derivazione, $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, perche' e' nulla per $t > 0$ e ha decadimento esponenziale per $t \to -\infty$.

Usiamo

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(3t)}{t}\right\}(\omega) = \pi\chi_{[-3,3]}(\omega).$$

Tabella del seno cardinale. Il valore agli estremi non incide sui calcoli in L^2.

Ponendo

$$h(t) = e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t},$$

si ha

$$\widehat{h}(\omega) = \pi\chi_{[2,8]}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: modulazione.

Poiche' $f_1 = h'$,

$$\widehat{f_1}(\omega) = i\pi\omega\,\chi_{[2,8]}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

Per f_2,

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(\omega) &= e^{-6}\mathcal{F}\{tH(-t)e^{3t}\}(\omega)\\ &= e^{-6}i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{3-i\omega}\right) = -\frac{e^{-6}}{(3-i\omega)^2}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Raccolta del fattore costante e^{-6}.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza e tabella $\mathcal{F}\{H(-t)e^{3t}\} = \frac{1}{3-i\omega}$.

$$\widehat{f_1}(\omega) = i\pi\omega\,\chi_{[2,8]}(\omega), \qquad \widehat{f_2}(\omega) = -\frac{e^{-6}}{(3-i\omega)^2}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.6.13

Soluzione esercizio 7.6.15 Verificare che f e' Fourier-trasformabile e calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = te^{-2|t|}\cos(3t).$$

Soluzione. La funzione ha decadimento esponenziale, quindi $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed e' Fourier-trasformabile.

Poniamo

$$A(\xi) = \mathcal{F}\{e^{-2|t|}\}(\xi) = \frac{4}{4+\xi^2}.$$

Tabella $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$, con $a = 2$.

Allora

$$\mathcal{F}\{te^{-2|t|}\}(\xi) = iA'(\xi) = -\frac{8i\xi}{(4+\xi^2)^2}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Poiche' $f(t) = te^{-2|t|}\cos(3t)$,

$$\widehat{f}(\omega) = -4i\left[\frac{\omega-3}{(4+(\omega-3)^2)^2} + \frac{\omega+3}{(4+(\omega+3)^2)^2}\right].$$

Trasformata di Fourier: modulazione.

Torna all'esercizio 7.6.15

Soluzione esercizio 7.6.17 Dopo aver verificato che $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, studiare a priori le proprieta' di $\widehat{f}$ e calcolarla, dove

$$f(t) = e^{-6|t|}(3 - 4t^2)\cos(5t).$$

Soluzione. La funzione ha decadimento esponenziale, quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

La funzione f e' reale e pari. Dunque $\widehat{f}$ e' reale e pari. Inoltre $\widehat{f}$ e' continua e tende a 0 all'infinito.

Poniamo

$$A(\xi) = \mathcal{F}\{e^{-6|t|}\}(\xi) = \frac{12}{36 + \xi^2}.$$

Tabella $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$, con $a = 6$.

Allora

$$\mathcal{F}\{t^2 e^{-6|t|}\}(\xi) = -A''(\xi) = \frac{864 - 72\xi^2}{(36 + \xi^2)^3}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Se $g(t) = e^{-6|t|}(3 - 4t^2)$, allora

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{36(\xi^4 + 80\xi^2 + 1200)}{(36 + \xi^2)^3}.$$

Prima uguaglianza. Combinazione $3e^{-6|t|} - 4t^2 e^{-6|t|}$.

Poiche' $f(t) = g(t)\cos(5t)$,

$$\widehat{f}(\omega) = 18\left[\frac{(\omega - 5)^4 + 80(\omega - 5)^2 + 1200}{(36 + (\omega - 5)^2)^3} + \frac{(\omega + 5)^4 + 80(\omega + 5)^2 + 1200}{(36 + (\omega + 5)^2)^3}\right].$$

Trasformata di Fourier: modulazione.

Torna all'esercizio 7.6.17

Soluzione esercizio 7.6.19 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \ln(1 + t^2) - \ln(9 + t^2).$$

Soluzione. Metodo: si deriva f e poi si usa la trasformata di $(t^2 + a^2)^{-1}$. La funzione e' integrabile, perche' per $|t| \to +\infty$ si ha $f(t) = O(t^{-2})$.

Per $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{2t}{9 + t^2}.$$

Derivata diretta.

Passando alla trasformata,

$$\begin{aligned} i\omega \widehat{f}(\omega) &= 2\mathcal{F}\left\{\frac{t}{1 + t^2}\right\}(\omega) - 2\mathcal{F}\left\{\frac{t}{9 + t^2}\right\}(\omega) \\ &= -2i\pi \operatorname{sgn}(\omega)\left(e^{-|\omega|} - e^{-3|\omega|}\right). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza applicata a $\mathcal{F}\{(t^2+a^2)^{-1}\} = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} -2\pi \dfrac{e^{-|\omega|} - e^{-3|\omega|}}{|\omega|}, & \omega \neq 0, \\ -4\pi, & \omega = 0. \end{cases}$$

Valore in $\omega = 0$. Singolarita' eliminabile.

Torna all'esercizio 7.6.19

Soluzione esercizio 7.6.21 Si consideri

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{4}{t^2}\right), \qquad t \neq 0.$$

Scrivere l'equazione differenziale soddisfatta da $\widehat{f}$.

Soluzione. Metodo: si calcola $tf'(t)$, per evitare la singolarita' $1/t$, e si trasforma.

Si ha

$$f(t) = \ln(t^2+4) - \ln(t^2), \qquad tf'(t) = -\frac{8}{t^2+4}.$$

Prima identita'. Riscrittura del logaritmo per $t \neq 0$.
Seconda identita'. Calcolo di $tf'(t)$.

Poiche'

$$\mathcal{F}\{tf'(t)\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(i\omega\widehat{f}(\omega)\right) = -\frac{d}{d\omega}\left(\omega\widehat{f}(\omega)\right),$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione e derivazione in frequenza.

mentre

$$\mathcal{F}\left\{-\frac{8}{t^2+4}\right\}(\omega) = -4\pi e^{-2|\omega|},$$

Tabella $\mathcal{F}\{(t^2+4)^{-1}\} = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$.

si ottiene

$$\boxed{\frac{d}{d\omega}\left(\omega\widehat{f}(\omega)\right) = 4\pi e^{-2|\omega|}.}$$

Risultato. Equazione differenziale in senso distribuzionale, e puntualmente per $\omega \neq 0$.

Torna all'esercizio 7.6.21

Soluzione esercizio 7.6.23 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \ln\left(\frac{25+t^2}{4+t^2}\right).$$

Soluzione. Metodo: formula per differenze di logaritmi quadratici. La funzione e' integrabile, perche' $f(t) = O(t^{-2})$ per $|t| \to +\infty$.

Per $a, b > 0$,

$$\mathcal{F}\{\ln(t^2+a^2) - \ln(t^2+b^2)\}(\omega) = -2\pi\frac{e^{-a|\omega|} - e^{-b|\omega|}}{|\omega|}.$$

Formula. Si ottiene derivando e usando $\mathcal{F}\{(t^2+a^2)^{-1}\} = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$.

Con $a = 5$ e $b = 2$,

$$\widehat{f}(\omega) = \begin{cases} 2\pi\dfrac{e^{-2|\omega|} - e^{-5|\omega|}}{|\omega|}, & \omega \neq 0, \\ 6\pi, & \omega = 0. \end{cases}$$

Valore in $\omega = 0$. Singolarita' eliminabile.

Torna all'esercizio 7.6.23

Soluzione esercizio 7.6.25 Calcolare $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = H(-t)(t-1)e^{2t}.$$

Soluzione. Metodo: tabella dell'esponenziale su semiretta negativa e derivazione in frequenza.

Partiamo da

$$\mathcal{F}\{H(-t)e^{2t}\}(\omega) = \frac{1}{2-i\omega}.$$

Tabella $\mathcal{F}\{H(-t)e^{at}\} = \frac{1}{a-i\omega}$, con $a = 2$.

Allora

$$\mathcal{F}\{tH(-t)e^{2t}\}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2-i\omega}\right) = -\frac{1}{(2-i\omega)^2}.$$

Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = -\frac{1}{(2-i\omega)^2} - \frac{1}{2-i\omega}.$$

Risultato. Trasformata di Fourier: linearita'.

Torna all'esercizio 7.6.25

7.11.4 Razionali reali traslati e modulati

Soluzione esercizio 7.7.1 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{e^{2it}}{(t-1)^2+4}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata della lorentziana, traslazione e modulazione.

Poniamo

$$g(t) = \frac{1}{t^2+4}.$$

Allora

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}. \tag{126}$$

Trasformata notevole. Lorentziana con $a = 2$.

La funzione dell'esercizio e'

$$f(t) = e^{2it}g(t-1).$$

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-i(\omega-2)}\frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-2|}.$$

Formula usata. Trasformata di Fourier: traslazione e modulazione.
Sostituzione. Formula (126) valutata in $\omega - 2$.

Pertanto

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega-2|}e^{-i(\omega-2)}}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.1

Soluzione esercizio 7.7.3 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\sin(2t)}{(t+2)^2+9}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata della lorentziana traslata e scrittura esponenziale del seno.

Poniamo

$$h(t) = \frac{1}{(t+2)^2+9}.$$

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}e^{2i\omega}. \tag{127}$$

Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con $a = 3$ e centro $c = -2$.

Poiche'

$$\sin(2t) = \frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i},$$

si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2i}\left[\widehat{h}(\omega-2)-\widehat{h}(\omega+2)\right]\\ &= \frac{\pi}{6i}\left[e^{-3|\omega-2|}e^{2i(\omega-2)}-e^{-3|\omega+2|}e^{2i(\omega+2)}\right].\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: modulazione.
Seconda uguaglianza. Formula (127) valutata in $\omega-2$ e in $\omega+2$.

Quindi

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{6i}\left[e^{-3|\omega-2|}e^{2i(\omega-2)}-e^{-3|\omega+2|}e^{2i(\omega+2)}\right]}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.3

Soluzione esercizio 7.7.5 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t)=\frac{1-\sin(2t)}{(t-4)^2+9}.$$

Soluzione. Metodo: si separa la funzione in una parte non modulata e una parte modulata dal seno.

Poniamo

$$h(t)=\frac{1}{(t-4)^2+9}.$$

Allora

$$\widehat{h}(\omega)=\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}e^{-4i\omega}. \tag{128}$$

Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con $a=3$ e centro $c=4$.

La funzione e'

$$f(t)=h(t)-h(t)\sin(2t).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \widehat{h}(\omega)-\frac{1}{2i}\left[\widehat{h}(\omega-2)-\widehat{h}(\omega+2)\right]\\ &= \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}e^{-4i\omega}-\frac{\pi}{6i}\left[e^{-3|\omega-2|}e^{-4i(\omega-2)}-e^{-3|\omega+2|}e^{-4i(\omega+2)}\right].\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: linearita' e modulazione.
Seconda uguaglianza. Formula (128) valutata in ω, $\omega-2$ e $\omega+2$.

Pertanto

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}e^{-4i\omega}-\frac{\pi}{6i}\left[e^{-3|\omega-2|}e^{-4i(\omega-2)}-e^{-3|\omega+2|}e^{-4i(\omega+2)}\right]}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.5

Soluzione esercizio 7.7.7 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t)=\frac{\cos(t-4)}{(t-4)^2+16}.$$

Soluzione. Metodo: prima si calcola la trasformata della funzione centrata nell'origine, poi si applica la traslazione.

Poniamo

$$g(t)=\frac{\cos t}{t^2+16}.$$

Usando

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+16}\right\}(\omega)=\frac{\pi}{4}e^{-4|\omega|},$$

si ottiene

$$\widehat{g}(\omega)=\frac{\pi}{8}\left[e^{-4|\omega-1|}+e^{-4|\omega+1|}\right]. \tag{129}$$

Trasformata notevole e modulazione. Si usa $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$.

Poiche'

$$f(t) = g(t-4),$$

si ha

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-4i\omega}\widehat{g}(\omega) = \frac{\pi}{8}e^{-4i\omega}\left[e^{-4|\omega-1|} + e^{-4|\omega+1|}\right].$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: traslazione.
Seconda uguaglianza. Formula (129).

Quindi

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{8}e^{-4i\omega}\left[e^{-4|\omega-1|} + e^{-4|\omega+1|}\right]}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.7

Soluzione esercizio 7.7.9 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\cos^2(3t)}{(t-2)^2 + 25}.$$

Soluzione. Metodo: si riduce $\cos^2(3t)$ a somma di esponenziali tramite la formula di duplicazione.

Poniamo

$$h(t) = \frac{1}{(t-2)^2 + 25}.$$

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\pi}{5}e^{-5|\omega|}e^{-2i\omega}. \tag{130}$$

Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con $a = 5$ e centro $c = 2$.

Poiche'

$$\cos^2(3t) = \frac{1 + \cos(6t)}{2},$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2}\widehat{h}(\omega) + \frac{1}{4}\left[\widehat{h}(\omega-6) + \widehat{h}(\omega+6)\right] \\ &= \frac{\pi}{10}e^{-5|\omega|}e^{-2i\omega} + \frac{\pi}{20}\left[e^{-5|\omega-6|}e^{-2i(\omega-6)} + e^{-5|\omega+6|}e^{-2i(\omega+6)}\right].\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Identita' trigonometrica: formula di duplicazione e trasformata di Fourier: modulazione.
Seconda uguaglianza. Formula (130) valutata in ω, $\omega - 6$ e $\omega + 6$.

Quindi

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{10}e^{-5|\omega|}e^{-2i\omega} + \frac{\pi}{20}\left[e^{-5|\omega-6|}e^{-2i(\omega-6)} + e^{-5|\omega+6|}e^{-2i(\omega+6)}\right]}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.9

Soluzione esercizio 7.7.11 Dopo aver verificato che f e' Fourier-trasformabile, calcolare esplicitamente $\widehat{f}$, dove

$$f(t) = \frac{\cos(2t)}{(t+4)^2 + 16}.$$

Utilizzando Plancherel, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2t)}{\left((t+4)^2 + 16\right)^2}\,dt.$$

Soluzione. La funzione e' continua e

$$|f(t)| \leq \frac{1}{(t+4)^2 + 16}.$$

Criterio del confronto. La maggiorante appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Quindi f e' Fourier-trasformabile e $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Poniamo

$$h(t) = \frac{1}{(t+4)^2 + 16}.$$

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\pi}{4} e^{-4|\omega|} e^{4i\omega}. \tag{131}$$

Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con $a = 4$ e centro $c = -4$.

Poiche' $\cos(2t) = (e^{2it} + e^{-2it})/2$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{h}(\omega - 2) + \widehat{h}(\omega + 2) \right] \\ &= \frac{\pi}{8} \left[e^{-4|\omega-2|} e^{4i(\omega-2)} + e^{-4|\omega+2|} e^{4i(\omega+2)} \right]. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: modulazione.
Seconda uguaglianza. Formula (131) valutata in $\omega - 2$ e in $\omega + 2$.

Per Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2t)}{\left((t+4)^2 + 16\right)^2} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{132}$$

Teorema di Plancherel.

Calcoliamo la norma della trasformata. Dalla formula di $\widehat{f}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega &= \frac{\pi^2}{64} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-4|\omega-2|} e^{4i(\omega-2)} + e^{-4|\omega+2|} e^{4i(\omega+2)} \right|^2 \, d\omega \\ &= \frac{\pi^2}{64} \left[\frac{1}{2} + \frac{17}{2} e^{-16} \cos(16) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{128} \left[1 + 17 e^{-16} \cos(16) \right]. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula esplicita di $\widehat{f}$.
Seconda uguaglianza. Si usa $\int_{\mathbb{R}} e^{-8|\omega-2|} \, d\omega = \frac{1}{4}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-8|\omega+2|} \, d\omega = \frac{1}{4}$, e $\int_{\mathbb{R}} e^{-4(|\omega-2|+|\omega+2|)} \, d\omega = \frac{17}{4} e^{-16}$.
Seconda uguaglianza. Termine misto: $2\,\mathrm{Re}(e^{-16i}) = 2\cos(16)$.

Sostituendo in (132),

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^2}{128} \left[1 + 17 e^{-16} \cos(16) \right] = \frac{\pi}{256} \left[1 + 17 e^{-16} \cos(16) \right].$$

Prima uguaglianza. Formula (132).

Quindi

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2(2t)}{\left((t+4)^2 + 16\right)^2} \, dt = \frac{\pi}{256} \left[1 + 17 e^{-16} \cos(16) \right]}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.11

Soluzione esercizio 7.7.13 Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1 + \cos(2t) - \sin(3t)}{(t+2)^2 + 4}.$$

Soluzione. Metodo: linearita', modulazione e formula della lorentziana traslata.

Poniamo

$$h(t) = \frac{1}{(t+2)^2 + 4}.$$

Allora
$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{2i\omega}. \tag{133}$$
Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con $a = 2$ e centro $c = -2$.

Usando
$$\cos(2t) = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}, \qquad \sin(3t) = \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i},$$
si ottiene
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \widehat{h}(\omega) + \frac{1}{2}\left[\widehat{h}(\omega-2) + \widehat{h}(\omega+2)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2i}\left[\widehat{h}(\omega-3) - \widehat{h}(\omega+3)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{2i\omega} + \frac{\pi}{4}\left[e^{-2|\omega-2|} e^{2i(\omega-2)} + e^{-2|\omega+2|} e^{2i(\omega+2)}\right] \\
&\quad - \frac{\pi}{4i}\left[e^{-2|\omega-3|} e^{2i(\omega-3)} - e^{-2|\omega+3|} e^{2i(\omega+3)}\right].
\end{aligned}$$
Prima e seconda riga. Trasformata di Fourier: linearita' e modulazione.
Terza e quarta riga. Formula (133) valutata negli argomenti indicati.

Pertanto
$$\boxed{\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|} e^{2i\omega} + \frac{\pi}{4}\left[e^{-2|\omega-2|} e^{2i(\omega-2)} + e^{-2|\omega+2|} e^{2i(\omega+2)}\right] \\
&\quad - \frac{\pi}{4i}\left[e^{-2|\omega-3|} e^{2i(\omega-3)} - e^{-2|\omega+3|} e^{2i(\omega+3)}\right].
\end{aligned}}$$
Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.13

Soluzione esercizio 7.7.15 Siano $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Calcolare la trasformata di Fourier di
$$f(t) = \frac{\cos(\beta t)}{(t-c)^2 + a^2}.$$

Soluzione. Metodo: formula parametrica della lorentziana traslata e modulazione.

Poniamo
$$h(t) = \frac{1}{(t-c)^2 + a^2}.$$
Allora
$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} e^{-ic\omega}. \tag{134}$$
Trasformata notevole e traslazione. Lorentziana con parametro $a > 0$ e centro c.

Poiche'
$$\cos(\beta t) = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2},$$
si ha
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \frac{1}{2}\left[\widehat{h}(\omega-\beta) + \widehat{h}(\omega+\beta)\right] \\
&= \frac{\pi}{2a}\left[e^{-a|\omega-\beta|} e^{-ic(\omega-\beta)} + e^{-a|\omega+\beta|} e^{-ic(\omega+\beta)}\right].
\end{aligned}$$
Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: modulazione.
Seconda uguaglianza. Formula (134) valutata in $\omega - \beta$ e in $\omega + \beta$.

Quindi
$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \frac{\pi}{2a}\left[e^{-a|\omega-\beta|} e^{-ic(\omega-\beta)} + e^{-a|\omega+\beta|} e^{-ic(\omega+\beta)}\right]}.$$
Risultato.

Torna all'esercizio 7.7.15

7.11.5 Antitrasformata e teorema di inversione

Soluzione esercizio 7.8.1 Per $\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 4},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: riconoscimento da tabella e teorema di inversione.

Dalla tabella delle trasformate,

$$\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\}(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}. \tag{135}$$

Trasformata notevole. Esponenziale bilatero con $a = 2$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{4}\,\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{4}e^{-2|t|}\right\}(\omega).$$

Prima uguaglianza. Formula (135).
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: linearita'.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{4}e^{-2|t|}}.$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua, quindi l'identificazione vale per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Torna all'esercizio 7.8.1

Soluzione esercizio 7.8.3 Per $\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 4},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: riconoscimento da tabella e teorema di inversione.

Dalla tabella,

$$\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\}(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}. \tag{136}$$

Trasformata notevole. Esponenziale bilatero con $a = 2$.

Allora

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\{e^{-2|t|}\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{-2|t|}\right\}(\omega).$$

Prima uguaglianza. Formula (136).
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: linearita'.

Quindi

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2}e^{-2|t|}}.$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua.

Torna all'esercizio 7.8.3

Soluzione esercizio 7.8.5 Per $\widehat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 9},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: riconoscimento da tabella e teorema di inversione.

Dalla tabella,

$$\mathcal{F}\{e^{-3|t|}\}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 9}. \tag{137}$$

Trasformata notevole. Esponenziale bilatero con $a = 3$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{6}\,\mathcal{F}\{e^{-3|t|}\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{6}e^{-3|t|}\right\}(\omega).$$

Prima uguaglianza. Formula (137).
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: linearita'.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{6}e^{-3|t|}}.$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua.

Torna all'esercizio 7.8.5

Soluzione esercizio 7.8.7 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 9},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: riconoscimento diretto da tabella.

Dalla tabella,

$$\mathcal{F}\{e^{-3|t|}\}(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 9}.$$

Trasformata notevole. Esponenziale bilatero con $a = 3$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-3|t|}\}(\omega).$$

Riconoscimento diretto della trasformata.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = e^{-3|t|}}.$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua.

Torna all'esercizio 7.8.7

Soluzione esercizio 7.8.9 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \chi_{[-5,5]}(\omega),$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: applicazione diretta del teorema di inversione.

Per $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-5}^{5} e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i\omega t}}{it}\right]_{\omega=-5}^{5} = \frac{e^{5it} - e^{-5it}}{2\pi i t} = \frac{\sin(5t)}{\pi t}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Teorema di inversione.
Seconda uguaglianza. Calcolo della primitiva, valido per $t \neq 0$.
Quarta uguaglianza. Formula di Eulero.

Nel punto $t = 0$ si usa direttamente la formula di inversione:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-5}^{5} 1\,d\omega = \frac{5}{\pi}.$$

Prima uguaglianza. Teorema di inversione nel punto $t = 0$.

Inoltre

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t)}{\pi t} = \frac{5}{\pi}.$$

Limite notevole. Singolarita' eliminabile in $t = 0$.

Quindi

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(5t)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ \dfrac{5}{\pi}, & t = 0. \end{cases}}$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.8.9

Soluzione esercizio 7.8.11 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega + 2i)^2},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: si riconduce il polo doppio alla derivazione in frequenza di una trasformata nota.

Partiamo dalla trasformata su semiretta negativa:

$$\mathcal{F}\{H(-t)e^{2t}\}(\omega) = \frac{1}{2 - i\omega}.$$

Tabella. Esponenziale su semiretta negativa con parametro 2.

Moltiplicando per t,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{tH(-t)e^{2t}\}(\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2 - i\omega}\right) \\ &= -\frac{1}{(2 - i\omega)^2} = \frac{1}{(\omega + 2i)^2}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.
Terza uguaglianza. Identita' $2 - i\omega = -i(\omega + 2i)$.

Quindi

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{tH(-t)e^{2t}\}(\omega).$$

Riconoscimento della trasformata.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} te^{2t}, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}}$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua in $t = 0$.

Torna all'esercizio 7.8.11

Soluzione esercizio 7.8.13 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega - 4i)^2},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: si usa la trasformata dell'esponenziale su semiretta positiva e la derivazione in frequenza.

Partiamo da

$$\mathcal{F}\{H(t)e^{-4t}\}(\omega) = \frac{1}{4 + i\omega}.$$

Tabella. Esponenziale su semiretta positiva con parametro 4.

Moltiplicando per t,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{tH(t)e^{-4t}\}(\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{4 + i\omega}\right) \\ &= \frac{1}{(4 + i\omega)^2} = -\frac{1}{(\omega - 4i)^2}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza.
Terza uguaglianza. Identita' $4 + i\omega = i(\omega - 4i)$.

Allora

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{-tH(t)e^{-4t}\}(\omega).$$

Riconoscimento della trasformata.

Quindi

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ -te^{-4t}, & t > 0. \end{cases}}$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua in $t = 0$.

Torna all'esercizio 7.8.13

Soluzione esercizio 7.8.15 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega + 2i)(\omega + 3i)},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: decomposizione in fratti semplici e inversione dei poli semplici.

Si ha

$$\frac{1}{(\omega + 2i)(\omega + 3i)} = -\frac{i}{\omega + 2i} + \frac{i}{\omega + 3i}.$$

Fratti semplici.

Usiamo la coppia

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega + ai}\right\}(t) = -iH(-t)e^{at}, \qquad a > 0.$$

Antitrasformata del polo semplice nel semipiano inferiore.

Quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= -i\left[-iH(-t)e^{2t}\right] + i\left[-iH(-t)e^{3t}\right] \\ &= H(-t)\left(e^{3t} - e^{2t}\right). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata dei due poli semplici con $a = 2$ e $a = 3$.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} e^{3t} - e^{2t}, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}}$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua in $t = 0$.

Torna all'esercizio 7.8.15

Soluzione esercizio 7.8.17 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega - 2i)(\omega - 5i)},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: decomposizione in fratti semplici e inversione dei poli semplici nel semipiano superiore.

Si ha

$$\frac{1}{(\omega - 2i)(\omega - 5i)} = \frac{i}{3}\frac{1}{\omega - 2i} - \frac{i}{3}\frac{1}{\omega - 5i}.$$

Fratti semplici.

Usiamo la coppia

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - ai}\right\}(t) = iH(t)e^{-at}, \qquad a > 0.$$

Antitrasformata del polo semplice nel semipiano superiore.

Quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{i}{3}\left[iH(t)e^{-2t}\right] - \frac{i}{3}\left[iH(t)e^{-5t}\right] \\ &= \frac{1}{3}H(t)\left(e^{-5t} - e^{-2t}\right). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata dei due poli semplici con $a = 2$ e $a = 5$.

Pertanto

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \dfrac{e^{-5t} - e^{-2t}}{3}, & t > 0. \end{cases}}$$

Teorema di inversione. La funzione ottenuta e' continua in $t = 0$.

Torna all'esercizio 7.8.17

Soluzione esercizio 7.8.19 Per $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega + 2i)(\omega - 3i)},$$

calcolare con il teorema di inversione la sua antitrasformata f.

Soluzione. Metodo: decomposizione in fratti semplici. In questo caso i due poli stanno in semipiani opposti.

Si ha

$$\frac{1}{(\omega + 2i)(\omega - 3i)} = \frac{i}{5}\frac{1}{\omega + 2i} - \frac{i}{5}\frac{1}{\omega - 3i}.$$

Fratti semplici.

Usiamo

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega + ai}\right\}(t) = -iH(-t)e^{at}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega - ai}\right\}(t) = iH(t)e^{-at}.$$

Antitrasformate dei poli semplici nei due semipiani.

Quindi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{i}{5}\left[-iH(-t)e^{2t}\right] - \frac{i}{5}\left[iH(t)e^{-3t}\right] \\ &= \frac{1}{5}H(-t)e^{2t} + \frac{1}{5}H(t)e^{-3t}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata dei due poli semplici con $a = 2$ e $a = 3$.

Scegliendo il rappresentante continuo,

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}e^{2t}, & t < 0, \\ \dfrac{1}{5}, & t = 0, \\ \dfrac{1}{5}e^{-3t}, & t > 0. \end{cases}}$$

Teorema di inversione. I due limiti laterali in $t = 0$ coincidono.

Torna all'esercizio 7.8.19

7.11.6 Convoluzioni tramite trasformata di Fourier

Soluzione esercizio 7.9.1 Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = \chi_{[-1,3]}(t) * \chi_{[-2,2]}(t).$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Fourier della convoluzione e inversione. Poniamo

$$f(t) = \chi_{[-1,3]}(t), \qquad g(t) = \chi_{[-2,2]}(t).$$

Le due funzioni sono in $L^1(\mathbb{R})$, quindi

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f * g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: convoluzione.

Per le due indicatrici si ha

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-i\omega}\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}, \qquad \widehat{g}(\omega) = \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}.$$

Trasformata di Fourier dell'indicatrice di un intervallo.

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = e^{-i\omega}\left(\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}\right)^2.$$

Poniamo

$$q(t) = \chi_{[-2,2]}(t) * \chi_{[-2,2]}(t).$$

Allora

$$\widehat{q}(\omega) = \left(\frac{2\sin(2\omega)}{\omega}\right)^2, \qquad q(t) = (4 - |t|)_+.$$

Prima formula. Trasformata di Fourier: convoluzione.
Seconda formula. Convoluzione di due indicatori: lunghezza dell'intersezione $[-2,2] \cap [t-2, t+2]$.

Quindi

$$\widehat{h}(\omega) = e^{-i\omega}\widehat{q}(\omega) \Longrightarrow h(t) = q(t-1).$$

Trasformata di Fourier: traslazione.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = (4 - |t-1|)_+ = \begin{cases} 0, & t \le -3, \\ t+3, & -3 < t \le 1, \\ 5-t, & 1 < t < 5, \\ 0, & t \ge 5. \end{cases}}$$

Torna all'esercizio 7.9.1

Soluzione esercizio 7.9.3 Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = e^{-2|t|} * e^{-5|t|}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Fourier della convoluzione e fratti semplici in frequenza. Poniamo

$$f(t) = e^{-2|t|}, \qquad g(t) = e^{-5|t|}.$$

Le due funzioni appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, quindi

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: convoluzione.

Usiamo la trasformata notevole

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \qquad a > 0.$$

Pertanto

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + 4}\frac{10}{\omega^2 + 25} = \frac{40}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 25)}.$$

Prima uguaglianza. Formula precedente con $a = 2$ e $a = 5$.

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{40}{(\omega^2+4)(\omega^2+25)} = \frac{40}{21}\frac{1}{\omega^2+4} - \frac{40}{21}\frac{1}{\omega^2+25}.$$

Fratti semplici.

Inoltre

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2+a^2}\right\}(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}.$$

Quindi

$$h(t) = \frac{40}{21}\frac{1}{4}e^{-2|t|} - \frac{40}{21}\frac{1}{10}e^{-5|t|} = \frac{10}{21}e^{-2|t|} - \frac{4}{21}e^{-5|t|}.$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata della decomposizione in fratti semplici.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \frac{10}{21}e^{-2|t|} - \frac{4}{21}e^{-5|t|}}.$$

Torna all'esercizio 7.9.3

Soluzione esercizio 7.9.5 Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = \left(e^{2t}H(-t)\right) * \left(e^{-3t}H(t)\right).$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Fourier della convoluzione e decomposizione in fratti semplici. Poniamo

$$f(t) = e^{2t}H(-t), \qquad g(t) = e^{-3t}H(t).$$

Le due funzioni appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, quindi

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: convoluzione.

Si ha

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2-i\omega}, \qquad \widehat{g}(\omega) = \frac{1}{3+i\omega}.$$

Trasformate notevoli delle esponenziali su semirette.

Dunque

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{(2-i\omega)(3+i\omega)} = \frac{1}{5}\frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{5}\frac{1}{3+i\omega}.$$

Seconda uguaglianza. Fratti semplici.

Antitrasformando,

$$h(t) = \frac{1}{5}e^{2t}H(-t) + \frac{1}{5}e^{-3t}H(t).$$

Antitrasformate delle esponenziali su semirette.

Scegliendo il rappresentante continuo,

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{2t}, & t<0, \\ \frac{1}{5}, & t=0, \\ \frac{1}{5}e^{-3t}, & t>0. \end{cases}}$$

Torna all'esercizio 7.9.5

Soluzione esercizio 7.9.7 Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = \frac{1}{t+2i} * \frac{1}{t^2+9}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Fourier della convoluzione e inversione tramite tabelle. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{t+2i}, \qquad g(t) = \frac{1}{t^2+9}.$$

Si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. La convoluzione e' quindi ben definita almeno come funzione di L^2.

Usiamo

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t+ai}\right\}(\omega) = -2\pi i\, H(\omega)e^{-a\omega}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+a^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}.$$

Trasformate notevoli.

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = \left[-2\pi i\, H(\omega)e^{-2\omega}\right]\left[\frac{\pi}{3}e^{-3|\omega|}\right] = -\frac{2\pi^2 i}{3}H(\omega)e^{-5\omega}.$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: convoluzione.
Seconda uguaglianza. Sul supporto di $H(\omega)$, si ha $|\omega| = \omega$.

Ora

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)e^{-a\omega}\}(t) = \frac{1}{2\pi(a-it)}.$$

Quindi

$$h(t) = -\frac{2\pi^2 i}{3}\frac{1}{2\pi(5-it)} = -\frac{\pi i}{3(5-it)} = \frac{\pi}{3(t+5i)}.$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata precedente con $a = 5$.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \frac{\pi}{3(t+5i)}}.$$

Torna all'esercizio 7.9.7

Soluzione esercizio 7.9.9 Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = \frac{1}{t+5i} * \frac{1}{(t+2i)^2}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Fourier della convoluzione e inversione tramite tabelle. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{t+5i}, \qquad g(t) = \frac{1}{(t+2i)^2}.$$

Si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. La convoluzione e' quindi ben definita almeno come funzione di L^2.

Usiamo

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t+ai}\right\}(\omega) = -2\pi i\, H(\omega)e^{-a\omega}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t+ai)^2}\right\}(\omega) = -2\pi\omega H(\omega)e^{-a\omega}.$$

Trasformate notevoli.

Allora

$$\widehat{h}(\omega) = \left[-2\pi i\, H(\omega)e^{-5\omega}\right]\left[-2\pi\omega H(\omega)e^{-2\omega}\right] = 4\pi^2 i\,\omega H(\omega)e^{-7\omega}.$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: convoluzione.

Ora

$$\mathcal{F}^{-1}\{\omega H(\omega)e^{-a\omega}\}(t) = \frac{1}{2\pi(a-it)^2}.$$

Quindi

$$h(t) = 4\pi^2 i\frac{1}{2\pi(7-it)^2} = \frac{2\pi i}{(7-it)^2} = -\frac{2\pi i}{(t+7i)^2}.$$

Prima uguaglianza. Antitrasformata precedente con $a = 7$.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = -\frac{2\pi i}{(t+7i)^2}}.$$

Torna all'esercizio 7.9.9

7.11.7 Calcolo di integrali tramite Plancherel

Soluzione esercizio 7.10.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione pari definita da

$$f(t) = (1 + 3|t|)e^{-3|t|}.$$

Verificare che f e' Fourier-trasformabile, calcolare $\widehat{f}$ e, usando il teorema di Plancherel, calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2+9)^4}.$$

Soluzione. La funzione e' continua, pari e ha decadimento esponenziale. Quindi

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Criterio del confronto.

Partiamo dalla tabella

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \qquad a > 0.$$

Derivando rispetto al parametro a,

$$\mathcal{F}\{|t|e^{-a|t|}\}(\omega) = -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right) = \frac{2(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

Derivazione sotto il segno di integrale.

Per $a = 3$,

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{6}{\omega^2+9} + 3\frac{2(9-\omega^2)}{(\omega^2+9)^2} = \frac{108}{(\omega^2+9)^2}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $a = 3$ nelle due tabelle precedenti.

Il valore appena ottenuto verra' usato in Plancherel:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{108}{(\omega^2+9)^2}. \tag{138}$$

Risultato intermedio.

Calcoliamo ora la norma quadratica di f:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt &= 2\int_0^{+\infty} (1+3t)^2 e^{-6t}\,dt \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Parita' di f^2.
Seconda uguaglianza. Calcolo delle primitive improprie esponenziali.

Per Plancherel,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$$

Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.

Sostituendo i valori ottenuti,

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{108^2}{(\omega^2+9)^4}\,d\omega.$$

Prima uguaglianza, lato sinistro. Sostituzione di $\int |f|^2 = \frac{5}{6}$.
Prima uguaglianza, lato destro. Sostituzione di $\widehat{f}(\omega) = \frac{108}{(\omega^2+9)^2}$, ottenuta in (138).

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2+9)^4} = \frac{5\pi}{34992}.$$

Risultato.

Torna all'esercizio 7.10.1

Soluzione esercizio 7.10.2 Si considerino

$$f_1(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t}\right), \qquad f_2(t) = H(-t)te^{3t-6}.$$

Verificare che $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, calcolare $\widehat{f_1}$, $\widehat{f_2}$ e usare Plancherel per calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2\, dt.$$

Soluzione. La funzione $\frac{\sin(3t)}{t}$ ha trasformata a supporto compatto; quindi, dopo modulazione e derivazione, $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, perche' e' nulla per $t > 0$ e ha decadimento esponenziale per $t \to -\infty$.

Usiamo

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(3t)}{t}\right\}(\omega) = \pi\chi_{[-3,3]}(\omega).$$

Tabella del seno cardinale. Il valore agli estremi non incide sui calcoli in L^2.

Ponendo

$$h(t) = e^{5it}\frac{\sin(3t)}{t},$$

si ha

$$\widehat{h}(\omega) = \pi\chi_{[2,8]}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: modulazione.

Poiche' $f_1 = h'$,

$$\widehat{f_1}(\omega) = i\pi\omega\,\chi_{[2,8]}(\omega). \tag{139}$$

Trasformata di Fourier: proprieta' di derivazione.

Per f_2,

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(\omega) &= e^{-6}\mathcal{F}\{tH(-t)e^{3t}\}(\omega)\\ &= e^{-6}i\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{3-i\omega}\right) = -\frac{e^{-6}}{(3-i\omega)^2}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Raccolta del fattore costante e^{-6}.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: derivazione in frequenza e tabella $\mathcal{F}\{H(-t)e^{3t}\} = \frac{1}{3-i\omega}$.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)|^2\, dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f_1}(\omega)|^2\, d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_2^8 \pi^2\omega^2\, d\omega = 84\pi.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Seconda uguaglianza. Sostituzione di $\widehat{f_1}(\omega) = i\pi\omega\chi_{[2,8]}(\omega)$, ottenuta in (139).
Terza uguaglianza. Calcolo dell'integrale polinomiale.

Torna all'esercizio 7.10.2

Soluzione esercizio 7.10.3 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+4}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale converge, perche' l'integranda e' continua su $\mathbb{R}$ e si comporta come t^{-2} per $|t| \to +\infty$.

Metodo: scegliere una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ il cui modulo quadrato sia l'integranda. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{t+2i}.$$

Allora

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{t^2+4}.$$

Modulo quadro del denominatore complesso.

La trasformata di f e'

$$\widehat{f}(\omega) = -2\pi i\, H(\omega) e^{-2\omega}.$$

Trasformata notevole del polo semplice nel semipiano inferiore.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} 4\pi^2 e^{-4\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione di $|f(t)|^2 = \frac{1}{t^2+4}$.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Sostituzione di $\widehat{f}(\omega) = -2\pi i\, H(\omega) e^{-2\omega}$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+4}\, dt = \frac{\pi}{2}}.$$

Torna all'esercizio 7.10.3

Soluzione esercizio 7.10.7 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(5t)}{t}\right)^2 dt.$$

Soluzione. L'integrale converge: l'integranda e' limitata in $t = 0$ e si comporta come una funzione dominata da $1/t^2$ all'infinito.

Metodo: riconoscere il seno cardinale come trasformata di una funzione caratteristica. Poniamo

$$f(t) = \chi_{[-5,5]}(t).$$

Allora

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2\sin(5\omega)}{\omega}. \tag{140}$$

Trasformata di Fourier dell'indicatrice di un intervallo centrato.

Usando (140),

$$I = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

Sostituzione di $\widehat{f}(\omega) = \frac{2\sin(5\omega)}{\omega}$.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega \\ &= \frac{1}{4} \, 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{4} \, 2\pi \cdot 10 = 5\pi. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula ottenuta da (140).
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. $\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[-5,5]}(t)|^2 \, dt = 10$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(5t)}{t} \right)^2 dt = 5\pi}.$$

Torna all'esercizio 7.10.7

Soluzione esercizio 7.10.11 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+9)^2} \, dt.$$

Soluzione. L'integrale converge, perche' l'integranda e' continua su $\mathbb{R}$ e si comporta come t^{-4} per $|t| \to +\infty$.

Metodo: scegliere una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ il cui modulo quadrato sia l'integranda. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{(t+3i)^2}.$$

Allora

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{(t^2+9)^2}.$$

Modulo quadro del denominatore complesso.

La trasformata di f e'

$$\widehat{f}(\omega) = -2\pi\omega H(\omega) e^{-3\omega}.$$

Trasformata notevole del polo doppio nel semipiano inferiore.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} 4\pi^2 \omega^2 e^{-6\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{54}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione di $|f(t)|^2 = \frac{1}{(t^2+9)^2}$.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Sostituzione di $\widehat{f}(\omega) = -2\pi\omega H(\omega) e^{-3\omega}$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+9)^2} \, dt = \frac{\pi}{54}}.$$

Torna all'esercizio 7.10.11

Soluzione esercizio 7.10.15 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale converge, perche' l'integranda e' continua su $\mathbb{R}$ e si comporta come t^{-4} per $|t| \to +\infty$.

Metodo: scrivere l'integranda come modulo quadro di una funzione razionale. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{(t+2i)(t+3i)}.$$

Allora

$$|f(t)|^2 = \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}.$$

Modulo quadro del denominatore complesso.

Scomponiamo f in fratti semplici:

$$f(t) = -\frac{i}{t+2i} + \frac{i}{t+3i}.$$

Fratti semplici.

Quindi

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= -i\left[-2\pi i\, H(\omega)e^{-2\omega}\right] + i\left[-2\pi i\, H(\omega)e^{-3\omega}\right] \\ &= 2\pi H(\omega)\left(e^{-3\omega} - e^{-2\omega}\right).\end{aligned} \tag{141}$$

Prima uguaglianza. Trasformata notevole del polo semplice nel semipiano inferiore.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \left(e^{-3\omega} - e^{-2\omega}\right)^2\, d\omega \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{30}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione di $|f(t)|^2 = \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}$.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Sostituzione di $\widehat{f}$ da (141).
Quarta uguaglianza. Calcolo dell'integrale esponenziale.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}\, dt = \frac{\pi}{30}}.$$

Torna all'esercizio 7.10.15

Soluzione esercizio 7.10.19 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t}\frac{\sin(7t)}{t}\, dt.$$

Soluzione. L'integrale converge: ciascun seno cardinale e' limitato in $t = 0$, mentre il prodotto e' dominato da $1/t^2$ all'infinito.

Metodo: usare Plancherel in forma bilineare. Poniamo

$$f(t) = \chi_{[-3,3]}(t), \qquad g(t) = \chi_{[-7,7]}(t).$$

Allora

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{2\sin(3\omega)}{\omega}, \qquad \widehat{g}(\omega) = \frac{2\sin(7\omega)}{\omega}. \tag{142}$$

Trasformata di Fourier dell'indicatrice di un intervallo centrato.

Da (142),

$$I = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)\, d\omega.$$

Sostituzione delle trasformate in (142).

Per Plancherel in forma bilineare,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega \\ &= \frac{1}{4}\, 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\, 2\pi \cdot 6 = 3\pi. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Le trasformate in (142) sono reali.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel in forma bilineare.
Terza uguaglianza. $[-3,3] \cap [-7,7] = [-3,3]$, quindi $\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, dt = 6$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t}\frac{\sin(7t)}{t}\, dt = 3\pi}.$$

Torna all'esercizio 7.10.19

Soluzione esercizio 7.10.23 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(4\omega) - \sin(2\omega)}{\omega}\right)^2 d\omega.$$

Soluzione. L'integrale converge: il numeratore si annulla in $\omega = 0$ con lo stesso ordine del denominatore, mentre all'infinito l'integranda e' dominata da C/ω^2.

Metodo: riconoscere l'integranda come modulo quadrato di una trasformata di Fourier. Poniamo

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\chi_{[-4,4]}(t) - \chi_{[-2,2]}(t)\right).$$

Allora

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin(4\omega) - \sin(2\omega)}{\omega}. \tag{143}$$

Trasformata di Fourier dell'indicatrice di un intervallo centrato.

Da (143),

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

Sostituzione di $\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin(4\omega) - \sin(2\omega)}{\omega}$.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{4}\, |[-4,4] \setminus [-2,2]| = 2\pi. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula precedente.

Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Su $[-4,4]\setminus[-2,2]$, si ha $|f(t)|=\frac{1}{2}$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(4\omega)-\sin(2\omega)}{\omega}\right)^2 d\omega = 2\pi}.$$

Torna all'esercizio 7.10.23

Soluzione esercizio 7.10.27 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^4 d\omega.$$

Soluzione. L'integrale converge: la funzione $\sin\omega/\omega$ e' limitata in $\omega=0$, mentre la quarta potenza e' dominata da C/ω^4 all'infinito.

Metodo: usare la trasformata dell'indicatrice e poi la proprieta' di convoluzione. Poniamo

$$f(t)=\chi_{[-1,1]}(t).$$

Allora

$$\widehat{f}(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}.$$

Trasformata di Fourier dell'indicatrice di un intervallo centrato.

Poniamo

$$q(t)=f*f(t).$$

Poiche'

$$\widehat{q}(\omega)=\widehat{f}(\omega)^2=4\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2,$$

si ottiene

$$I=\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{q}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{144}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: convoluzione.
Formula (144). Sostituzione di $\widehat{q}(\omega)=4(\sin\omega/\omega)^2$.

La convoluzione $q=f*f$ e' la funzione triangolare

$$q(t)=(2-|t|)_+.$$

Convoluzione di due indicatori: lunghezza dell'intersezione $[-1,1]\cap[t-1,t+1]$.

Per Plancherel e per (144),

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{q}(\omega)|^2\,d\omega\\
&=\frac{1}{16}\,2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|q(t)|^2\,dt\\
&=\frac{1}{16}\,2\pi\int_{-2}^{2}(2-|t|)^2\,dt=\frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Formula (144).
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Sostituzione di $q(t)=(2-|t|)_+$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^4 d\omega=\frac{2\pi}{3}}.$$

Torna all'esercizio 7.10.27

Soluzione esercizio 7.10.31 Calcolare, usando il teorema di Plancherel,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(3t)}{t^2(t^2+4)}\,dt.$$

Soluzione. L'integrale converge: in $t=0$ il fattore $\sin(3t)/t$ ha limite finito, mentre all'infinito l'integranda e' dominata da C/t^4.

Metodo: scrivere l'integranda come modulo quadrato e poi usare Plancherel. Poniamo

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{\sin(3\omega)}{\omega}\frac{1}{\omega+2i}.$$

Allora

$$|\widehat{h}(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2(\omega^2+4)}.$$

Modulo quadro del fattore $\omega+2i$.

Costruiamo h. Poiche'

$$\frac{\sin(3\omega)}{\omega} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\chi_{[-3,3]}\}(\omega), \qquad \frac{1}{\omega+2i} = \mathcal{F}\{-iH(-t)e^{2t}\}(\omega),$$

si ha

$$h(t) = -\frac{i}{2}\,\chi_{[-3,3]} * \left(H(-t)e^{2t}\right)(t).$$

Trasformata di Fourier: convoluzione.

Calcoliamo esplicitamente h:

$$h(t) = \begin{cases} -\dfrac{i}{2}e^{2t}\sinh 6, & t < -3, \\ -\dfrac{i}{4}\left(1-e^{2t-6}\right), & -3 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases} \tag{145}$$

Prima riga. Per $t < -3$, tutto l'intervallo $[-3,3]$ contribuisce alla convoluzione.
Seconda riga. Per $-3 \le t \le 3$, contribuisce solo la parte $[t,3]$ dell'intervallo $[-3,3]$.
Terza riga. Per $t > 3$, non ci sono punti dell'intervallo $[-3,3]$ che soddisfano la condizione del fattore $H(-(t-s))$.

Da (145),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\,dt &= \frac{1}{4}\sinh^2 6\int_{-\infty}^{-3} e^{4t}\,dt + \frac{1}{16}\int_{-3}^{3}\left(1-e^{2t-6}\right)^2 dt \\ &= \frac{11+e^{-12}}{32}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione della funzione h ottenuta in (145).
Seconda uguaglianza. Calcolo degli integrali esponenziali.

Per Plancherel,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{h}(\omega)|^2\,d\omega \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\,dt \\ &= 2\pi\frac{11+e^{-12}}{32} = \frac{\pi}{16}\left(11+e^{-12}\right). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Sostituzione di $|\widehat{h}(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(3\omega)}{\omega^2(\omega^2+4)}$.
Seconda uguaglianza. Trasformata di Fourier: identita' di Plancherel.
Terza uguaglianza. Sostituzione di $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\,dt = \frac{11+e^{-12}}{32}$.

Risultato:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(3t)}{t^2(t^2+4)}\,dt = \frac{\pi}{16}\left(11+e^{-12}\right)}.$$

Torna all'esercizio 7.10.31

8 Convoluzione

8.1 Introduzione

La convoluzione e' un'operazione che combina due funzioni tenendo conto di tutti i modi in cui una puo' essere traslata rispetto all'altra. Per funzioni reali o complesse definite su $\mathbb{R}$, si pone

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\,ds.$$

In modo equivalente,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds.$$

La seconda forma e' spesso piu' comoda quando f ha un supporto semplice.

Negli esercizi compaiono soprattutto tre situazioni:

1. calcolo esplicito di una convoluzione;
2. equazioni in cui l'incognita compare sotto un prodotto di convoluzione;
3. domande teoriche sulle proprieta' della funzione convoluta.

Per funzioni causali, cioe' nulle per $t < 0$, si usa spesso la convoluzione su semiretta

$$(f *_+ g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \qquad t > 0.$$

Questa forma e' particolarmente adatta alla trasformata di Laplace.

8.2 Proprieta' fondamentali

Nelle formule seguenti si assumono ipotesi sufficienti di integrabilita', regolarita' o convergenza per rendere lecite le operazioni indicate.

1. **Commutativita'.**
$$f * g = g * f.$$
2. **Associativita'.**
$$(f * g) * h = f * (g * h).$$
3. **Linearita'.**
$$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h).$$
4. **Supporto.**
$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$
In particolare, se
$$\operatorname{supp} f \subset [a,b], \qquad \operatorname{supp} g \subset [c,d],$$
allora
$$\operatorname{supp}(f * g) \subset [a+c, b+d].$$
Se non ci sono cancellazioni, l'ampiezza del supporto e' la somma delle ampiezze dei due supporti.
5. **Stima L^1.** Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ e
$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$
6. **Stima di Young.** Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \le p \le +\infty$, allora
$$f * g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad \|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

7. **Regolarita'.** Se una delle due funzioni e' regolare e l'altra e' integrabile, la convoluzione eredita regolarita'. Per esempio, se $f' \in L^1$ e $g \in L^1$, allora

$$(f * g)' = f' * g.$$

Analogamente, quando $g' \in L^1$,

$$(f * g)' = f * g'.$$

8. **Teorema della convoluzione per Fourier.** Con la convenzione

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt,$$

si ha

$$\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).$$

Di conseguenza, se il prodotto delle trasformate e' semplice, conviene calcolare $f * g$ passando nel dominio delle frequenze.

9. **Prodotto e convoluzione in frequenza.** Con la stessa convenzione,

$$\mathcal{F}\{fg\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega).$$

10. **Trasformata di Laplace della convoluzione causale.** Se f e g sono causali, allora

$$\mathcal{L}\{f *_+ g\}(p) = \mathcal{L}\{f\}(p)\mathcal{L}\{g\}(p).$$

11. **Parita'.** Se f e g sono pari, allora $f * g$ e' pari. Se una e' pari e l'altra e' dispari, allora $f * g$ e' dispari. Se entrambe sono dispari, allora $f * g$ e' pari.

12. **Positivita'.** Se $f \geq 0$ e $g \geq 0$, allora

$$f * g \geq 0.$$

8.3 Calcolo esplicito di convoluzioni

In questa categoria bisogna determinare la funzione

$$h(t) = (f * g)(t)$$

in forma esplicita. Spesso si chiede anche di individuare il supporto o la sua ampiezza.

Metodo.

1. **Scrivere la definizione.** Si parte da

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t - s)\, ds.$$

2. **Determinare il dominio effettivo di integrazione.** Se f e g sono tagliate da funzioni caratteristiche, l'integrale non e' su tutta $\mathbb{R}$, ma solo sui punti in cui entrambi i fattori sono diversi da zero.

   Se

$$\operatorname{supp} f \subset [a, b], \qquad \operatorname{supp} g \subset [c, d],$$

   allora

$$s \in [a, b], \qquad t - s \in [c, d].$$

Il secondo vincolo va sempre riscritto come vincolo su s:

$$c \le t - s \le d \iff t - d \le s \le t - c.$$

Quindi

$$s \in E_t := [a, b] \cap [t - d, t - c].$$

Se $E_t \neq \varnothing$, allora

$$E_t = [\max\{a, t - d\}, \min\{b, t - c\}] \, .$$

Percio' l'integrale da impostare e'

$$h(t) = \int_{\max\{a,t-d\}}^{\min\{b,t-c\}} f(s)g(t - s) \, ds,$$

ma solo nei tratti in cui l'estremo inferiore e' minore dell'estremo superiore. Fuori da quei tratti si ha $h(t) = 0$.

3. **Scegliere gli estremi di integrazione.** Gli estremi dell'integrale non si scelgono a intuito: sono gli estremi dell'intersezione E_t. Bisogna quindi decidere, tratto per tratto, quale tra gli estremi sinistri e' il massimo e quale tra gli estremi destri e' il minimo. Per esempio, se in un certo tratto

$$\max\{a, t - d\} = a, \qquad \min\{b, t - c\} = t - c,$$

allora in quel tratto si imposta

$$h(t) = \int_a^{t-c} f(s)g(t - s) \, ds.$$

4. **Dividere l'asse reale in intervalli.** Gli estremi cambiano quando variano le intersezioni dei supporti. Per supporti intervallari, i punti critici sono

$$a + c, \quad a + d, \quad b + c, \quad b + d.$$

Su ciascun intervallo la formula dell'integrale e' stabile.

5. **Calcolare l'integrale su ogni tratto.** Una volta fissati gli estremi, si integra la funzione ottenuta. Se i fattori sono polinomiali, si ottengono polinomi a tratti. Se compaiono esponenziali, logaritmi o funzioni razionali, si usano le primitive elementari corrispondenti.

6. **Usare Fourier quando semplifica.** Se i fattori hanno trasformate notevoli, si puo' calcolare

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$$

e poi invertire la trasformata.

7. **Gestire le derivate.** Se compare una derivata, conviene usare

$$f * g' = (f * g)'$$

quando le ipotesi lo permettono, oppure il fatto che la derivata diventa moltiplicazione per $i\omega$ nel dominio di Fourier.

8. **Controllare supporto e regolarita'.** Alla fine si verifica che la formula ottenuta sia nulla fuori dal supporto previsto e che abbia la regolarita' coerente con i fattori convoluti.

Esercizi.

1. Date
$$f(t) = \chi_{[-1,2]}(t), \qquad g(t) = \chi_{[-2,1]}(t),$$
determinare $h(t) = (f * g)(t)$ e indicare il supporto. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.1

2. Date
$$f(t) = (t+2)\chi_{[-1,1]}(t), \qquad g(t) = 3\chi_{[-2,2]}(t),$$
calcolare esplicitamente $h(t) = (f * g)(t)$ e specificare l'ampiezza del supporto.

3. Date
$$f(t) = t\chi_{[-2,2]}(t), \qquad g(t) = (1-t^2)\chi_{[-1,1]}(t),$$
determinare $h(t) = (f * g)(t)$. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.3

4. Sia
$$f(t) = (2 - |t|)_+.$$
Calcolare $h(t) = (f * f)(t)$ e indicare il supporto.

5. Date
$$f(t) = e^{-|t|}, \qquad g(t) = \chi_{[-2,2]}(t),$$
determinare $h(t) = (f * g)(t)$. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.5

6. Date
$$f(t) = H(t)e^{-2t}, \qquad g(t) = H(t)\sin t,$$
calcolare $h(t) = (f * g)(t)$.

7. Utilizzando il teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare
$$h(t) = \frac{\sin t}{t} * \frac{1-\cos(2t)}{t^2}.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.7

8. Utilizzando la trasformata di Fourier, calcolare
$$h(t) = (3 - |t|)_+ * \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sin(2t)}{t}\right),$$
dove $(3 - |t|)_+ = \max\{3 - |t|, 0\}$.

9. Calcolare l'espressione esplicita della funzione
$$h(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.9

10. Date
$$f(t) = (t-a)\chi_{[-a,a]}(t), \qquad g(t) = (2a-t)\chi_{[-a,a]}(t), \qquad a > 0,$$
determinare $h(t) = (f * g)(t)$.

11. Date
$$f(t) = \chi_{[0,a]}(t), \qquad g(t) = (1+bt)\chi_{[0,3a]}(t), \qquad a > 0,$$
calcolare $h(t) = (f * g)(t)$. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.3.11

12. Calcolare l'espressione esplicita di
$$h(t) = \chi_{[-2,1]}(t) * \left(\chi_{[-1,2]}(t)\log(2+|t|)\right).$$

8.4 Equazioni di convoluzione

In questa categoria l'incognita compare dentro una convoluzione. Quando gli integrali sono su $[0, t]$, la struttura e' causale e il metodo naturale e' la trasformata di Laplace.

Metodo.

1. **Riconoscere la convoluzione causale.** Un integrale del tipo
$$\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau$$
si scrive come
$$(Y *_+ Y)(t).$$

2. **Applicare la trasformata di Laplace.** Si pone
$$\mathcal{L}\{Y(t)\}(p) = \mathcal{Y}(p).$$
Allora
$$\mathcal{L}\{Y *_+ Y\}(p) = \mathcal{Y}(p)^2.$$

3. **Trasformare il termine noto.** Si usano le formule
$$\mathcal{L}\{H(t)\}(p) = \frac{1}{p}, \qquad \mathcal{L}\{tH(t)\}(p) = \frac{1}{p^2},$$
insieme alla linearita'.

4. **Risolvere l'equazione algebrica.** L'equazione di convoluzione diventa un'equazione algebrica per $\mathcal{Y}(p)$. Nei casi quadratici si ottiene una relazione del tipo
$$a\mathcal{Y}(p)^2 + b\mathcal{Y}(p) + R(p) = 0.$$

5. **Scegliere il ramo corretto.** Se compaiono radici, il ramo si sceglie imponendo il comportamento atteso per una trasformata di Laplace:
$$\mathcal{Y}(p) \to 0 \qquad (p \to +\infty)$$
per funzioni causali localmente integrabili.

6. **Invertire la trasformata.** Dopo aver trovato $\mathcal{Y}(p)$, si usa la tabella delle trasformate di Laplace o uno sviluppo in serie per ricavare $Y(t)$.

7. **Verificare la soluzione.** La funzione trovata va sostituita nell'equazione originale, almeno a livello di trasformata, per controllare che il ramo scelto sia coerente.

Esercizi.

1. Risolvere, per $t > 0$, l'equazione di convoluzione
$$\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = Y(t) + tH(t) - H(t).$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 8.4.1

2. Risolvere, per $t > 0$, l'equazione di convoluzione
$$3\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = 2Y(t) + 3tH(t) - 2H(t).$$

3. Trovare una soluzione causale dell'equazione

$$2(Y *_+ Y)(t) = 5Y(t) + 2tH(t) - 5H(t), \qquad t > 0.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 8.4.3

4. Determinare Y sapendo che

$$(Y *_+ Y)(t) + 2Y(t) = 3H(t) + tH(t), \qquad t > 0.$$

5. Risolvere l'equazione lineare di convoluzione

$$Y(t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} Y(\tau)\, d\tau = H(t), \qquad t > 0.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 8.4.5

6. Risolvere l'equazione lineare di convoluzione

$$Y(t) - 2\int_0^t \sin(t-\tau) Y(\tau)\, d\tau = e^{-t}H(t), \qquad t > 0.$$

8.5 Domande teoriche sulla convoluzione

In questa categoria non si chiede necessariamente di calcolare la convoluzione. Bisogna usare i risultati generali per dedurre proprieta' della funzione

$$h = f * g.$$

Metodo.

1. **Controllare che la convoluzione sia ben definita.** Si verificano le appartenenze funzionali: L^1, L^2, L^∞, supporto compatto, continuita' o regolarita'.

2. **Usare le stime di Young.** Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$, allora

$$f * g \in L^p.$$

   Questo permette di dedurre rapidamente appartenenze a spazi funzionali.

3. **Determinare il supporto.** Se i supporti sono compatti, si usa

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

   Per intervalli si sommano gli estremi.

4. **Dedurre continuita' e regolarita'.** La convoluzione tende a regolarizzare. Se uno dei due fattori e' abbastanza regolare e l'altro e' integrabile, la convoluzione eredita derivate.

5. **Studiare parita' e segno.** Se i fattori sono pari, dispari o non negativi, queste proprieta' si trasferiscono alla convoluzione secondo le regole generali.

6. **Usare Fourier quando serve.** Il teorema

$$\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$$

   permette di dedurre annullamenti, regolarita' e decadimento senza calcolare direttamente h.

Esercizi.

1. Date
$$f(t) = e^{-t^2}, \qquad g(t) = e^{-2|t|},$$
indicare le principali proprieta' di $h = f * g$ senza calcolarla esplicitamente. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.5.1

2. Date
$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad g(t) = e^{-3t^2},$$
determinare le principali proprieta' di $h = f * g$: continuita', integrabilita', parita' e segno.

3. Date
$$f(t) = \chi_{[-4,-2]}(t), \qquad g(t) = \chi_{[1,3]}(t),$$
giustificare che $h = f * g$ e' ben definita e precisare il supporto previsto dalla teoria. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.5.3

4. Date
$$f(t) = \chi_{[-2,1]}(t), \qquad g(t) = t^2\chi_{[0,4]}(t),$$
indicare ampiezza del supporto, segno e appartenenza di $h = f * g$ agli spazi $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$.

5. Siano
$$f(t) = \frac{1}{(t-2i)^2}, \qquad g(t) = \frac{1}{(t+3i)^2}.$$
Usando il teorema della convoluzione, mostrare che
$$(f * g)(t) \equiv 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 8.5.5

6. Siano
$$f(t) = e^{-2|t|}, \qquad g(t) = \chi_{[-1,2]}(t).$$
Indicare quali proprieta' di $h = f * g$ si possono dedurre direttamente dalla teoria della convoluzione.

7. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $f \geq 0$, $g \geq 0$,
$$\operatorname{supp} f \subset [-1,3], \qquad \operatorname{supp} g \subset [2,5].$$
Stabilire quali proprieta' generali valgono per $h = f * g$. Vai alla soluzione dell'esercizio 8.5.7

8. Date due funzioni f e g reali, dispari e appartenenti a $L^1(\mathbb{R})$, stabilire la parita' di $h = f * g$ e indicare se la convoluzione e' necessariamente nulla.

8.6 Soluzioni degli esercizi

8.6.1 Calcolo esplicito di convoluzioni

Soluzione esercizio 8.3.1 Date
$$f(t) = \chi_{[-1,2]}(t), \qquad g(t) = \chi_{[-2,1]}(t),$$
determinare $h(t) = (f * g)(t)$ e indicare il supporto.

Soluzione. Metodo: definizione diretta e intersezione dei supporti. Usiamo
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)\,ds.$$

Il fattore $f(s)$ impone
$$s \in [-1, 2],$$
mentre il fattore $g(t - s)$ impone
$$t - s \in [-2, 1] \Longleftrightarrow s \in [t - 1, t + 2].$$
Quindi
$$h(t) = |[-1, 2] \cap [t - 1, t + 2]| \,.$$
Dominio effettivo di integrazione. La convoluzione di due indicatori e' la lunghezza dell'intersezione dei due intervalli.

Infatti
$$f(s)g(t - s) = \begin{cases} 1, & s \in [-1, 2] \cap [t - 1, t + 2], \\ 0, & s \notin [-1, 2] \cap [t - 1, t + 2]. \end{cases}$$
Integrando. L'integrale e' quindi l'integrale della costante 1 sull'intervallo effettivo di integrazione.

Indichiamo con E_t l'intervallo effettivo di integrazione:
$$E_t = [-1, 2] \cap [t - 1, t + 2].$$
Quando E_t non e' vuoto, il suo estremo sinistro e' il massimo tra gli estremi sinistri e il suo estremo destro e' il minimo tra gli estremi destri:
$$E_t = [\max\{-1, t - 1\}, \min\{2, t + 2\}] \,.$$
Estremi effettivi. Si integrano solo i valori di s per cui entrambi i fattori sono diversi da zero.

I punti critici sono
$$-3, \qquad 0, \qquad 3.$$
Punti critici. In $t = -3$ inizia l'intersezione, in $t = 0$ cambia quale estremo e' attivo, in $t = 3$ termina l'intersezione.

Questi valori vengono dalle uguaglianze tra gli estremi:
$$t + 2 = -1, \qquad t - 1 = -1, \qquad t + 2 = 2, \qquad t - 1 = 2.$$
Uguaglianze critiche. Esse danno rispettivamente $t = -3$, $t = 0$, $t = 0$, $t = 3$.

Per $t \leq -3$, si ha $t + 2 \leq -1$, quindi $E_t = \varnothing$.

Per $-3 < t \leq 0$, si ha
$$t - 1 \leq -1, \qquad -1 < t + 2 \leq 2.$$
Quindi
$$E_t = [-1, t + 2], \qquad h(t) = \int_{-1}^{t+2} 1 \, ds = t + 3.$$
Primo tratto non nullo. L'estremo sinistro e' -1, l'estremo destro e' $t + 2$.
Integrale impostato. Si integra 1 da -1 a $t + 2$ perche' $[-1, 2] \cap [t - 1, t + 2] = [-1, t + 2]$ in questo tratto.

Per $0 < t < 3$, si ha
$$-1 < t - 1 < 2, \qquad t + 2 > 2.$$
Quindi
$$E_t = [t - 1, 2], \qquad h(t) = \int_{t-1}^{2} 1 \, ds = 3 - t.$$
Secondo tratto non nullo. L'estremo sinistro e' $t - 1$, l'estremo destro e' 2.
Integrale impostato. Si integra 1 da $t - 1$ a 2 perche' $[-1, 2] \cap [t - 1, t + 2] = [t - 1, 2]$ in questo tratto.

Per $t \geq 3$, si ha $t - 1 \geq 2$, quindi $E_t = \varnothing$.

Pertanto

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \le -3, \\ t+3, & -3 < t \le 0, \\ 3-t, & 0 < t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Formula a tratti. Lunghezza di $[-1,2] \cap [t-1, t+2]$ sui tre intervalli determinati dai punti critici.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = (3 - |t|)_+, \qquad \operatorname{supp} h = [-3,3].}$$

Torna all'esercizio 8.3.1

Soluzione esercizio 8.3.3 Date

$$f(t) = t\chi_{[-2,2]}(t), \qquad g(t) = (1-t^2)\chi_{[-1,1]}(t),$$

determinare $h(t) = (f * g)(t)$.

Soluzione. Metodo: definizione diretta e divisione in intervalli. Si ha

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s\left[1 - (t-s)^2\right] \chi_{[-2,2]}(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\, ds.$$

Il fattore $\chi_{[-2,2]}(s)$ impone

$$s \in [-2,2],$$

mentre il fattore $\chi_{[-1,1]}(t-s)$ impone

$$t - s \in [-1,1] \iff s \in [t-1, t+1].$$

Il dominio effettivo e'

$$s \in [-2,2] \cap [t-1, t+1].$$

Dominio effettivo di integrazione.

Indichiamo questo intervallo con

$$E_t = [-2,2] \cap [t-1, t+1].$$

Quando E_t non e' vuoto,

$$E_t = [\max\{-2, t-1\}, \min\{2, t+1\}] .$$

Estremi effettivi. L'estremo inferiore e' il piu' grande tra gli estremi sinistri; l'estremo superiore e' il piu' piccolo tra gli estremi destri.

Il supporto e' contenuto in

$$[-2,2] + [-1,1] = [-3,3].$$

I punti critici sono

$$-3, \qquad -1, \qquad 1, \qquad 3.$$

Supporto della convoluzione e cambiamento degli estremi di integrazione.

Questi valori vengono dalle uguaglianze tra gli estremi:

$$t+1 = -2, \qquad t-1 = -2, \qquad t+1 = 2, \qquad t-1 = 2.$$

Uguaglianze critiche. Esse danno rispettivamente $t = -3$, $t = -1$, $t = 1$, $t = 3$.

Per $t \le -3$, si ha $t + 1 \le -2$, quindi $E_t = \varnothing$.

Per $-3 < t < -1$, si ha

$$t - 1 < -2, \qquad -2 < t + 1 < 2.$$

Quindi $E_t = [-2, t+1]$.

Per $-1 \le t \le 1$, si ha

$$-2 \le t-1, \qquad t+1 \le 2.$$

Quindi $E_t = [t-1, t+1]$.

Per $1 < t < 3$, si ha

$$-2 < t-1 < 2, \qquad t+1 > 2.$$

Quindi $E_t = [t-1, 2]$.

Per $t \ge 3$, si ha $t-1 \ge 2$, quindi $E_t = \varnothing$.

Quindi

$$h(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{t+1} s\left[1-(t-s)^2\right]\,ds, & -3 < t < -1, \\ \displaystyle\int_{t-1}^{t+1} s\left[1-(t-s)^2\right]\,ds, & -1 \le t \le 1, \\ \displaystyle\int_{t-1}^{2} s\left[1-(t-s)^2\right]\,ds, & 1 < t < 3. \end{cases}$$

Estremi di integrazione. Intersezione di $[-2, 2]$ con $[t-1, t+1]$ nei tre tratti.
Prima riga. Si usa $E_t = [-2, t+1]$, quindi gli estremi sono -2 e $t+1$.
Seconda riga. Si usa $E_t = [t-1, t+1]$, quindi gli estremi sono $t-1$ e $t+1$.
Terza riga. Si usa $E_t = [t-1, 2]$, quindi gli estremi sono $t-1$ e 2.

Calcolando le tre primitive,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \le -3, \\ -\dfrac{(t+3)^2(t^2-6t-3)}{12}, & -3 < t < -1, \\ \dfrac{4t}{3}, & -1 \le t \le 1, \\ \dfrac{(t-3)^2(t^2+6t-3)}{12}, & 1 < t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$$

Formula a tratti. Calcolo degli integrali precedenti.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 0, & t \le -3, \\ -\dfrac{(t+3)^2(t^2-6t-3)}{12}, & -3 < t < -1, \\ \dfrac{4t}{3}, & -1 \le t \le 1, \\ \dfrac{(t-3)^2(t^2+6t-3)}{12}, & 1 < t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}}$$

Torna all'esercizio 8.3.3

Soluzione esercizio 8.3.5 Date

$$f(t) = e^{-|t|}, \qquad g(t) = \chi_{[-2,2]}(t),$$

determinare $h(t) = (f * g)(t)$.

Soluzione. Metodo: definizione diretta. Poiche' $g(t-s) \neq 0$ se e solo se

$$t-s \in [-2, 2] \iff s \in [t-2, t+2],$$

si ha

$$h(t) = \int_{t-2}^{t+2} e^{-|s|}\,ds.$$

Dominio effettivo di integrazione. Il fattore $\chi_{[-2,2]}(t-s)$ seleziona l'intervallo $s \in [t-2, t+2]$. Qui $f(s) = e^{-|s|}$ non ha supporto compatto e non aggiunge altri estremi. Gli unici estremi dell'integrale sono quindi $t-2$ e $t+2$.

Gli estremi dell'intervallo $[t-2, t+2]$ attraversano 0 nei punti

$$t = -2, \qquad t = 2.$$

Punti critici. Il valore assoluto cambia formula in $s = 0$.

Per $t \le -2$, si ha $t+2 \le 0$, quindi tutto l'intervallo di integrazione sta in $(-\infty, 0]$ e $e^{-|s|} = e^s$.

Per $-2 < t < 2$, si ha

$$t-2 < 0 < t+2,$$

quindi l'integrale va spezzato in 0.

Per $t \ge 2$, si ha $t-2 \ge 0$, quindi tutto l'intervallo di integrazione sta in $[0, +\infty)$ e $e^{-|s|} = e^{-s}$.

Quindi

$$h(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-2}^{t+2} e^{s}\,ds, & t \le -2, \\ \displaystyle\int_{t-2}^{0} e^{s}\,ds + \int_{0}^{t+2} e^{-s}\,ds, & -2 < t < 2, \\ \displaystyle\int_{t-2}^{t+2} e^{-s}\,ds, & t \ge 2. \end{cases}$$

Formula a tratti. Segno di s negli intervalli di integrazione.
Prima riga. Si usa l'intervallo $[t-2, t+2]$, tutto contenuto in $(-\infty, 0]$.
Seconda riga. Si usa lo stesso intervallo $[t-2, t+2]$, ma lo si spezza in 0 perche' cambia la formula di $e^{-|s|}$.
Terza riga. Si usa l'intervallo $[t-2, t+2]$, tutto contenuto in $[0, +\infty)$.

Calcolando,

$$h(t) = \begin{cases} 2\sinh(2)e^{t}, & t \le -2, \\ 2 - 2e^{-2}\cosh t, & -2 < t < 2, \\ 2\sinh(2)e^{-t}, & t \ge 2. \end{cases}$$

Formula a tratti. Calcolo degli integrali esponenziali.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 2\sinh(2)e^{t}, & t \le -2, \\ 2 - 2e^{-2}\cosh t, & -2 < t < 2, \\ 2\sinh(2)e^{-t}, & t \ge 2. \end{cases}}$$

Torna all'esercizio 8.3.5

Soluzione esercizio 8.3.7 Utilizzando il teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier, calcolare

$$h(t) = \frac{\sin t}{t} * \frac{1-\cos(2t)}{t^2}.$$

Soluzione. Metodo: teorema della convoluzione per Fourier. Usiamo la convenzione

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Poniamo

$$f_1(t) = \frac{\sin t}{t}, \qquad f_2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{t^2}.$$

Le trasformate notevoli sono

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(\omega) = \pi\chi_{[-1,1]}(\omega),$$

e

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1-\cos(2t)}{t^2}\right\}(\omega) = \pi(2-|\omega|)_+.$$

Prima formula. Trasformata notevole del seno cardinale.
Seconda formula. Si usa $f_2(t) = 2f_1(t)^2$, la regola prodotto-convoluzione e $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} = (2-|\omega|)_+$.

Per il teorema della convoluzione,

$$\widehat{h}(\omega) = \pi^2(2-|\omega|)\chi_{[-1,1]}(\omega).$$

Trasformata di Fourier: convoluzione.

Il fattore $\chi_{[-1,1]}(\omega)$ impone

$$\omega \in [-1,1].$$

Quindi, nella formula di inversione, l'integrale su $\mathbb{R}$ si riduce all'integrale su $[-1,1]$.

Invertiamo:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi^2(2-|\omega|)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \pi\int_0^1 (2-\omega)\cos(\omega t)\,d\omega \\ &= \pi\left(\frac{\sin t}{t} + \frac{1-\cos t}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: formula di inversione.
Prima uguaglianza, estremi. L'integrale e' da -1 a 1 perche' $\widehat{h}$ e' nulla fuori da $[-1,1]$.
Seconda uguaglianza. La parte immaginaria e' dispari e si annulla; la parte reale e' pari.
Terza uguaglianza. Calcolo dell'integrale in ω.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \pi\left(\frac{\sin t}{t} + \frac{1-\cos t}{t^2}\right)}$$

con prolungamento continuo in $t=0$, dove $h(0) = \frac{3\pi}{2}$.

Torna all'esercizio 8.3.7

Soluzione esercizio 8.3.9 Calcolare l'espressione esplicita della funzione

$$h(t) = \chi_{[-1,1]}(t) * \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^2}\right).$$

Soluzione. Metodo: prima si calcola la convoluzione con la funzione non derivata, poi si deriva. Poniamo

$$k(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad q(t) = \chi_{[-1,1]} * k(t).$$

Poiche' $k' \in L^1(\mathbb{R})$, si puo' usare la derivazione della convoluzione:

$$h(t) = q'(t).$$

Convoluzione: derivazione.

La funzione $\chi_{[-1,1]}$ ha supporto $[-1,1]$, mentre $k(t-s)$ non impone vincoli di supporto. Dunque il dominio effettivo di integrazione e'

$$s \in [-1,1].$$

Dominio effettivo di integrazione. Gli estremi sono -1 e 1 perche' l'unico fattore a supporto compatto e' $\chi_{[-1,1]}(s)$.

Calcoliamo q:

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(t-s)^2}\, ds \\ &= \int_{t-1}^{t+1} \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \arctan(t+1) - \arctan(t-1). \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Definizione di convoluzione; l'indicatrice $\chi_{[-1,1]}(s)$ impone $s \in [-1,1]$.
Seconda uguaglianza. Integrazione per sostituzione: pongo $u = t-s$. Gli estremi $s=-1$ e $s=1$ diventano rispettivamente $u = t+1$ e $u = t-1$; il segno di $ds = -du$ inverte gli estremi.

Derivando,

$$h(t) = q'(t) = \frac{1}{1+(t+1)^2} - \frac{1}{1+(t-1)^2}.$$

Prima uguaglianza. Convoluzione: derivazione.
Seconda uguaglianza. Derivazione della formula trovata per q.

Equivalentemente, la derivazione della formula di q evita di impostare direttamente

$$h(t) = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+(t-s)^2}\right) ds.$$

Integrale diretto. Gli estremi sarebbero ancora -1 e 1 per lo stesso vincolo $\chi_{[-1,1]}(s) \neq 0$.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{1+(t+1)^2} - \frac{1}{1+(t-1)^2}}.$$

Torna all'esercizio 8.3.9

Soluzione esercizio 8.3.11 Date

$$f(t) = \chi_{[0,a]}(t), \qquad g(t) = (1+bt)\chi_{[0,3a]}(t), \qquad a > 0,$$

calcolare $h(t) = (f * g)(t)$.

Soluzione. Metodo: definizione diretta e intersezione dei supporti. Si ha

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,a]}(s)(1+b(t-s))\chi_{[0,3a]}(t-s)\, ds.$$

Il fattore $\chi_{[0,a]}(s)$ impone

$$s \in [0,a],$$

mentre il fattore $\chi_{[0,3a]}(t-s)$ impone

$$t - s \in [0,3a] \iff s \in [t-3a, t].$$

Il dominio effettivo e'

$$s \in [0,a] \cap [t-3a, t].$$

Dominio effettivo di integrazione.

Indichiamo questo intervallo con

$$E_t = [0,a] \cap [t-3a, t].$$

Quando E_t non e' vuoto,

$$E_t = [\max\{0, t-3a\}, \min\{a,t\}].$$

Estremi effettivi. L'estremo inferiore e' imposto dal vincolo piu' restrittivo tra $s \geq 0$ e $s \geq t-3a$; l'estremo superiore dal vincolo piu' restrittivo tra $s \leq a$ e $s \leq t$.

Il supporto e' contenuto in

$$[0,a] + [0,3a] = [0,4a].$$

I punti critici sono
$$0, \qquad a, \qquad 3a, \qquad 4a.$$
Supporto della convoluzione e cambiamento degli estremi di integrazione.

Questi valori vengono dalle uguaglianze tra gli estremi:
$$t = 0, \qquad t = a, \qquad t - 3a = 0, \qquad t - 3a = a.$$
Uguaglianze critiche. Esse danno rispettivamente $t = 0$, $t = a$, $t = 3a$, $t = 4a$.

Per $t \le 0$, si ha $t \le 0$, quindi $E_t = \varnothing$.

Per $0 < t < a$, si ha
$$t - 3a < 0, \qquad t < a.$$
Quindi $E_t = [0, t]$.

Per $a \le t \le 3a$, si ha
$$t - 3a \le 0, \qquad t \ge a.$$
Quindi $E_t = [0, a]$.

Per $3a < t < 4a$, si ha
$$0 < t - 3a < a, \qquad t > a.$$
Quindi $E_t = [t - 3a, a]$.

Per $t \ge 4a$, si ha $t - 3a \ge a$, quindi $E_t = \varnothing$.

Quindi
$$h(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t (1 + b(t-s))\, ds, & 0 < t < a, \\ \displaystyle\int_0^a (1 + b(t-s))\, ds, & a \le t \le 3a, \\ \displaystyle\int_{t-3a}^a (1 + b(t-s))\, ds, & 3a < t < 4a. \end{cases}$$
Estremi di integrazione. Intersezione di $[0, a]$ con $[t - 3a, t]$ nei tre tratti.
Prima riga. Si usa $E_t = [0, t]$, quindi gli estremi sono 0 e t.
Seconda riga. Si usa $E_t = [0, a]$, quindi gli estremi sono 0 e a.
Terza riga. Si usa $E_t = [t - 3a, a]$, quindi gli estremi sono $t - 3a$ e a.

Calcolando,
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t + \dfrac{b}{2}t^2, & 0 < t < a, \\ a + abt - \dfrac{ba^2}{2}, & a \le t \le 3a, \\ 4a + 4a^2b + abt - t - \dfrac{b}{2}t^2, & 3a < t < 4a, \\ 0, & t \ge 4a. \end{cases}$$
Formula a tratti. Calcolo degli integrali precedenti.

Risultato:
$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t + \dfrac{b}{2}t^2, & 0 < t < a, \\ a + abt - \dfrac{ba^2}{2}, & a \le t \le 3a, \\ 4a + 4a^2b + abt - t - \dfrac{b}{2}t^2, & 3a < t < 4a, \\ 0, & t \ge 4a. \end{cases}}$$
Torna all'esercizio 8.3.11

8.6.2 Equazioni di convoluzione

Soluzione esercizio 8.4.1 Risolvere, per $t > 0$, l'equazione di convoluzione

$$\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = Y(t) + tH(t) - H(t).$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace della convoluzione causale. Cerchiamo una soluzione causale localmente integrabile e poniamo

$$\mathcal{L}\{Y(t)\}(p) = \mathcal{Y}(p).$$

L'integrale a sinistra e' una convoluzione causale:

$$\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = (Y *_+ Y)(t).$$

Riconoscimento della convoluzione. Entrambe le variabili τ e $t-\tau$ restano nell'intervallo causale $[0,t]$.

Applicando la trasformata di Laplace,

$$\mathcal{Y}(p)^2 = \mathcal{Y}(p) + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Trasformata di Laplace: convoluzione causale.
Primo termine a destra. $\mathcal{L}\{Y(t)\}(p) = \mathcal{Y}(p)$.
Secondo termine a destra. $\mathcal{L}\{tH(t)\}(p) = 1/p^2$.
Terzo termine a destra. $\mathcal{L}\{H(t)\}(p) = 1/p$.

Risolviamo l'equazione algebrica (8.6.2):

$$\mathcal{Y}(p)^2 - \mathcal{Y}(p) + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 0.$$

$$\Delta(p) = 1 - 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^2.$$

Discriminante. Equazione quadratica nell'incognita $\mathcal{Y}(p)$.

Per $p > 2$ prendiamo il ramo

$$\sqrt{\Delta(p)} = 1 - \frac{2}{p}.$$

Scelta del ramo della radice. Questo e' il ramo reale positivo per p grande.

Le due radici sono

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{1 \pm \left(1 - \frac{2}{p}\right)}{2} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{p}, \\ \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Formula risolutiva. Sostituzione $\sqrt{\Delta(p)} = 1 - 2/p$.

Per una trasformata di Laplace di una funzione causale localmente integrabile deve valere

$$\mathcal{Y}(p) \to 0 \qquad (p \to +\infty).$$

Quindi il ramo corretto e'

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{1}{p}.$$

Scelta della soluzione. Il ramo $1 - 1/p$ tende a 1, quindi non ha il comportamento richiesto.

Invertendo,

$$Y(t) = H(t).$$

Trasformata inversa di Laplace. $\mathcal{L}^{-1}\{1/p\} = H(t)$.

Verifica:

$$(H *_+ H)(t) = \int_0^t 1\,d\tau = tH(t),$$

e

$$H(t) + tH(t) - H(t) = tH(t).$$

Verifica. Entrambi i membri dell'equazione originale coincidono.

Risultato:

$$\boxed{Y(t) = H(t).}$$

Torna all'esercizio 8.4.1

Soluzione esercizio 8.4.3 Trovare una soluzione causale dell'equazione

$$2(Y *_+ Y)(t) = 5Y(t) + 2tH(t) - 5H(t), \qquad t > 0.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace della convoluzione causale. Poniamo

$$\mathcal{L}\{Y(t)\}(p) = \mathcal{Y}(p).$$

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione,

$$2\mathcal{Y}(p)^2 = 5\mathcal{Y}(p) + \frac{2}{p^2} - \frac{5}{p}.$$

Trasformata di Laplace: convoluzione causale.
Termine $2(Y *_+ Y)$. La trasformata e' $2\mathcal{Y}(p)^2$.
Termine $2tH(t)$. La trasformata e' $2/p^2$.
Termine $-5H(t)$. La trasformata e' $-5/p$.

Risolviamo l'equazione algebrica (8.6.2):

$$2\mathcal{Y}(p)^2 - 5\mathcal{Y}(p) + \frac{5}{p} - \frac{2}{p^2} = 0.$$

$$\Delta(p) = 25 - 8\left(\frac{5}{p} - \frac{2}{p^2}\right) = \left(5 - \frac{4}{p}\right)^2.$$

Discriminante. Equazione quadratica nell'incognita $\mathcal{Y}(p)$.

Per $p > 4/5$ prendiamo

$$\sqrt{\Delta(p)} = 5 - \frac{4}{p}.$$

Scelta del ramo della radice. Questo ramo e' positivo per p grande.

Le due radici sono

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{5 \pm \left(5 - \frac{4}{p}\right)}{4} = \begin{cases} \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{p}, \\ \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Formula risolutiva. Sostituzione $\sqrt{\Delta(p)} = 5 - 4/p$.

Per una soluzione causale ordinaria deve essere

$$\mathcal{Y}(p) \to 0 \qquad (p \to +\infty).$$

Quindi

$$\mathcal{Y}(p) = \frac{1}{p}.$$

Scelta della soluzione. Il ramo $5/2 - 1/p$ non tende a zero.

Invertendo,

$$Y(t) = H(t).$$

Trasformata inversa di Laplace. $\mathcal{L}^{-1}\{1/p\} = H(t)$.

Verifica:

$$2(H *_+ H)(t) = 2tH(t),$$

mentre

$$5H(t) + 2tH(t) - 5H(t) = 2tH(t).$$

Verifica. Entrambi i membri coincidono.

Risultato:

$$\boxed{Y(t) = H(t).}$$

Torna all'esercizio 8.4.3

Soluzione esercizio 8.4.5 Risolvere l'equazione lineare di convoluzione

$$Y(t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} Y(\tau)\, d\tau = H(t), \qquad t > 0.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace e risoluzione algebrica. Poniamo

$$k(t) = e^{-t}H(t), \qquad \mathcal{L}\{Y(t)\}(p) = \mathcal{Y}(p).$$

L'integrale e' la convoluzione causale tra k e Y:

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)} Y(\tau)\, d\tau = (k *_+ Y)(t).$$

Riconoscimento della convoluzione. Il fattore $e^{-(t-\tau)}$ dipende dalla variabile causale $t - \tau$.

Le trasformate necessarie sono

$$\mathcal{L}\{k(t)\}(p) = \frac{1}{p+1}, \qquad \mathcal{L}\{H(t)\}(p) = \frac{1}{p}.$$

Trasformate di Laplace. Formula dell'esponenziale causale e del gradino.

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione,

$$\mathcal{Y}(p) + \frac{1}{p+1}\mathcal{Y}(p) = \frac{1}{p}.$$

Trasformata di Laplace: convoluzione causale.

Da (8.6.2),

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(p) &= \frac{1}{p}\frac{p+1}{p+2} \\ &= \frac{p+1}{p(p+2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Si raccoglie $\mathcal{Y}(p)(1 + 1/(p+1))$ in (8.6.2).
Terza uguaglianza. Decomposizione in fratti semplici.

Invertendo,

$$Y(t) = \frac{1}{2}H(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}H(t).$$

Trasformata inversa di Laplace. Si invertono separatamente $1/p$ e $1/(p+2)$.

Verifica a livello di trasformata:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2}\right)\left(1 + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p}.$$

Verifica. Il prodotto coincide con la trasformata del termine noto.

Risultato:

$$\boxed{Y(t) = \frac{1}{2}H(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}H(t).}$$

Torna all'esercizio 8.4.5

8.6.3 Domande teoriche sulla convoluzione

Soluzione esercizio 8.5.1 Date

$$f(t) = e^{-t^2}, \qquad g(t) = e^{-2|t|},$$

indicare le principali proprieta' di $h = f * g$ senza calcolarla esplicitamente.

Soluzione. Metodo: proprieta' generali della convoluzione. Le due funzioni verificano

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Appartenenza funzionale. Entrambe decadono esponenzialmente o piu' rapidamente all'infinito e sono limitate.

Per le disuguaglianze di Young,

$$h = f * g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Disuguaglianze di Young. Si usano $L^1 * L^1 \subset L^1$, $L^1 * L^2 \subset L^2$ e $L^1 * L^\infty \subset L^\infty$.

Inoltre

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} e^{-2|t-s|} \, ds.$$

Definizione di convoluzione. L'integrale e' assolutamente convergente per ogni t.

Poiche'

$$e^{-s^2} > 0, \qquad e^{-2|t-s|} > 0, \qquad s, t \in \mathbb{R},$$

si ottiene

$$h(t) > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Segno. L'integranda e' positiva su tutto $\mathbb{R}$.

Quindi

$$\operatorname{supp} h = \mathbb{R}.$$

Supporto. La funzione non si annulla in nessun punto.

Le funzioni f e g sono reali e pari. Dunque

$$h(-t) = h(t).$$

Parita' della convoluzione. La convoluzione di due funzioni pari e' pari.

La funzione f e' C^∞ e

$$f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$h^{(n)} = f^{(n)} * g, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Regolarita' della convoluzione. Si puo' derivare il fattore regolare f sotto convoluzione.

In particolare

$$h \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Infine,

$$h \in C_0(\mathbb{R}).$$

Continuita' e decadimento. La convoluzione di una funzione integrabile con una funzione continua infinitesima all'infinito e' continua e infinitesima all'infinito.

Risultato:

$$\boxed{h \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad h > 0, \quad h \text{ pari}, \quad \operatorname{supp} h = \mathbb{R}.}$$

Torna all'esercizio 8.5.1

Soluzione esercizio 8.5.3 Date

$$f(t)=\chi_{[-4,-2]}(t),\qquad g(t)=\chi_{[1,3]}(t),$$

giustificare che $h=f*g$ e' ben definita e precisare il supporto previsto dalla teoria.

Soluzione. Metodo: appartenenza a L^1 e supporto della convoluzione. Si ha

$$f,g\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Appartenenza funzionale. Sono funzioni caratteristiche di intervalli limitati.

Per Young,

$$h=f*g\in L^1(\mathbb{R})\qquad \text{e}\qquad h=f*g\in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Disuguaglianze di Young. Si usano $L^1*L^1\subset L^1$ e $L^1*L^\infty\subset L^\infty$.

In forma diretta,

$$h(t)=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-4,-2]}(s)\chi_{[1,3]}(t-s)\,ds.$$

Il primo fattore impone

$$s\in[-4,-2],$$

mentre il secondo impone

$$t-s\in[1,3]\iff s\in[t-3,t-1].$$

Quindi il dominio effettivo di integrazione e'

$$E_t=[-4,-2]\cap[t-3,t-1].$$

Dominio effettivo. L'integrale e' la lunghezza dell'intersezione E_t, quindi e' ben definito e finito.

Dalla teoria del supporto,

$$\operatorname{supp}(f*g)\subset\operatorname{supp}f+\operatorname{supp}g.$$

Supporto della convoluzione.

Qui

$$\operatorname{supp}f=[-4,-2],\qquad \operatorname{supp}g=[1,3].$$

Per la somma di intervalli,

$$[-4,-2]+[1,3]=[-3,1].$$

Somma dei supporti. Si sommano gli estremi degli intervalli.

Quindi

$$\operatorname{supp}h\subset[-3,1].$$

Supporto previsto dalla teoria.

In questo caso l'inclusione e' in realta' un'uguaglianza. Infatti, per $-3<t<1$, gli intervalli $[-4,-2]$ e $[t-3,t-1]$ si intersecano con lunghezza positiva. Dunque

$$\operatorname{supp}h=[-3,1].$$

Supporto effettivo. Agli estremi l'intersezione si riduce a un punto, mentre all'interno ha lunghezza positiva.

Risultato:

$$\boxed{h \text{ e' ben definita},\qquad h\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}),\qquad \operatorname{supp}h=[-3,1].}$$

Torna all'esercizio 8.5.3

Soluzione esercizio 8.5.5 Siano

$$f(t) = \frac{1}{(t-2i)^2}, \qquad g(t) = \frac{1}{(t+3i)^2}.$$

Usando il teorema della convoluzione, mostrare che

$$(f * g)(t) \equiv 0.$$

Soluzione. Metodo: teorema della convoluzione per la trasformata di Fourier. Usiamo la convenzione

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-i\omega t}\, dt.$$

Le funzioni f e g appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, perche' hanno decadimento dell'ordine $1/t^2$ all'infinito e non hanno poli reali.

Le trasformate notevoli sono

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t-ai)^2}\right\}(\omega) = 2\pi\omega e^{a\omega} H(-\omega), \qquad a > 0,$$

e

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t+bi)^2}\right\}(\omega) = -2\pi\omega e^{-b\omega} H(\omega), \qquad b > 0.$$

Trasformate notevoli. Si ottengono, ad esempio, dai residui oppure derivando le trasformate dei poli semplici.

Applicando queste formule con $a = 2$ e $b = 3$,

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^{2\omega} H(-\omega), \qquad \widehat{g}(\omega) = -2\pi\omega e^{-3\omega} H(\omega).$$

Sostituzione. Nella prima formula $a = 2$; nella seconda formula $b = 3$.

Per il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\omega) &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega) \\
&= -4\pi^2\omega^2 e^{-\omega} H(-\omega)H(\omega) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Fourier: convoluzione.
Seconda uguaglianza. Sostituzione delle formule trovate per $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$.
Terza uguaglianza. I fattori $H(-\omega)$ e $H(\omega)$ hanno supporti disgiunti, a parte $\omega = 0$, dove il fattore ω^2 annulla comunque il prodotto.

Poiche' la trasformata di Fourier e' iniettiva su $L^1(\mathbb{R})$,

$$f * g = 0 \qquad \text{quasi ovunque.}$$

Iniettivita' della trasformata di Fourier.

Inoltre $f * g$ e' continua, quindi l'identita' quasi ovunque diventa identita' puntuale:

$$(f * g)(t) \equiv 0.$$

Continuita'. La convoluzione delle funzioni considerate e' continua.

Risultato:

$$\boxed{(f * g)(t) \equiv 0.}$$

Torna all'esercizio 8.5.5

Soluzione esercizio 8.5.7 Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $f \geq 0$, $g \geq 0$,

$$\operatorname{supp} f \subset [-1, 3], \qquad \operatorname{supp} g \subset [2, 5].$$

Stabilire quali proprieta' generali valgono per $h = f * g$.

Soluzione. Metodo: Young, segno e supporto della convoluzione. Poiche'

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}),$$

la convoluzione e' ben definita quasi ovunque e

$$h = f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Disuguaglianza di Young. Si usa $L^1 * L^1 \subset L^1$.

Inoltre

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Stima di Young.

Poiche' $f \geq 0$ e $g \geq 0$,

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s)\, ds \geq 0$$

per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$. Positivita'. L'integranda e' non negativa.

Per il supporto,

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Supporto della convoluzione.

Usando le inclusioni assegnate,

$$\operatorname{supp} h \subset [-1, 3] + [2, 5] = [1, 8].$$

Somma dei supporti. Si sommano gli estremi degli intervalli.

Quindi h ha supporto compatto contenuto in $[1, 8]$. In particolare

$$h(t) = 0 \qquad \text{per quasi ogni } t \notin [1, 8].$$

Annullamento fuori dal supporto previsto.

Si puo' anche calcolare l'integrale totale:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s)\, ds\, dt \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(s)\, ds \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\, du \right).\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Definizione di convoluzione.
Seconda uguaglianza. Teorema di Fubini-Tonelli e cambio di variabile $u = t - s$.

Non si puo' invece determinare il supporto esatto senza informazioni piu' precise su dove f e g siano effettivamente diverse da zero. Allo stesso modo, dalle sole ipotesi $f, g \in L^1$ non si deducono in generale continuita' o limitatezza di h.

Risultato:

$$\boxed{h \in L^1(\mathbb{R}), \qquad h \geq 0 \text{ q.o.}, \qquad \operatorname{supp} h \subset [1, 8].}$$

Torna all'esercizio 8.5.7

9 Trasformata di Laplace

9.1 Introduzione

La trasformata di Laplace associa a una funzione causale $F(t)$, cioe' nulla per $t < 0$, una funzione complessa della variabile s. In queste note useremo la convenzione

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt.$$

L'integrale non converge necessariamente per ogni $s \in \mathbb{C}$. Di solito esiste un numero reale λ_F, detto ascissa di convergenza, tale che la trasformata converge nel semipiano

$$\operatorname{Re} s > \lambda_F.$$

Negli esercizi bisogna quasi sempre calcolare una trasformata, determinare un'antitrasformata, risolvere un problema di Cauchy o usare il teorema della convoluzione.

La trasformata di Laplace e' particolarmente efficace per problemi in avanti perche' trasforma derivate e convoluzioni in operazioni algebriche:

$$\mathcal{L}\{F'\}(s) = s\mathcal{L}\{F\}(s) - F(0^+), \qquad \mathcal{L}\{F * G\}(s) = \mathcal{L}\{F\}(s)\mathcal{L}\{G\}(s).$$

9.2 Proprieta' operative e trasformate notevoli

Nelle formule seguenti si assumono ipotesi sufficienti di convergenza e regolarita'. Le funzioni sono intese come causali quando compare il fattore $H(t)$.

1. **Linearita'.**
$$\mathcal{L}\{\alpha F + \beta G\} = \alpha\mathcal{L}\{F\} + \beta\mathcal{L}\{G\}.$$

2. **Traslazione esponenziale.**
$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}(s-a).$$

3. **Traslazione nel tempo.** Se $a > 0$, allora
$$\mathcal{L}\{H(t-a)F(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{F(t)\}(s).$$

4. **Moltiplicazione per t.**
$$\mathcal{L}\{tF(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{F(t)\}(s).$$
Piu' in generale,
$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{F(t)\}(s).$$

5. **Derivazione.**
$$\mathcal{L}\{F'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - F(0^+).$$
Inoltre
$$\mathcal{L}\{F''(t)\}(s) = s^2\mathcal{L}\{F(t)\}(s) - sF(0^+) - F'(0^+).$$

6. **Integrazione.**
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(\tau)\, d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{F(t)\}(s).$$

7. **Divisione per t.** Se il secondo membro converge, allora
$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{F(t)\}(\sigma)\, d\sigma.$$

8. **Convoluzione causale.** Con

$$(F * G)(t) = \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau,$$

si ha

$$\mathcal{L}\{F * G\}(s) = \mathcal{L}\{F\}(s)\mathcal{L}\{G\}(s).$$

9. **Funzioni periodiche causali.** Se $F(t+T) = F(t)$ per $t > 0$, allora

$$\mathcal{L}\{H(t)F(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} F(t)\,dt.$$

10. **Funzione costante.**

$$\mathcal{L}\{H(t)\}(s) = \frac{1}{s}, \qquad \lambda = 0.$$

11. **Esponenziale.**

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad \lambda = \operatorname{Re} a.$$

12. **Potenze.**

$$\mathcal{L}\{H(t)t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Piu' in generale,

$$\mathcal{L}\{H(t)t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \operatorname{Re} \alpha > -1.$$

13. **Seno e coseno.**

$$\mathcal{L}\{H(t)\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{H(t)\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

14. **Seno e coseno iperbolici.**

$$\mathcal{L}\{H(t)\sinh(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{H(t)\cosh(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}.$$

15. **Logaritmo.**

$$\mathcal{L}\{H(t)\log t\}(s) = -\frac{\gamma + \log s}{s},$$

dove γ e' la costante di Eulero.

16. **Rapporto esponenziale.** Per $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}\left\{H(t)\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right\}(s) = \log\left(\frac{s-b}{s-a}\right),$$

nel semipiano in cui il membro sinistro converge.

17. **Funzione di Bessel.**

$$\mathcal{L}\{H(t)J_0(at)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}.$$

9.3 Calcolo delle trasformate

In questa categoria e' data una funzione $F(t)$ e bisogna calcolare

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}(s)$$

precisando l'ascissa di convergenza.

Metodo.

1. **Verificare la causalita'.** Se la funzione non contiene esplicitamente $H(t)$, si controlla comunque che sia nulla per $t < 0$, oppure si riscrive come funzione causale.

2. **Scomporre la funzione.** Si separano termini elementari: potenze, esponenziali, seni, coseni, funzioni traslate, funzioni a tratti, funzioni periodiche e convoluzioni.

3. **Applicare le formule note.** Si usano linearita', traslazione esponenziale, traslazione nel tempo, derivazione rispetto a s e formule della tabella.

4. **Trattare le funzioni a tratti.** Una funzione definita su intervalli si riscrive con funzioni di Heaviside oppure si integra direttamente sugli intervalli in cui la formula cambia.

5. **Trattare le funzioni periodiche.** Se F e' periodica per $t > 0$, si usa

$$\mathcal{L}\{H(t)F(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} F(t)\, dt.$$

6. **Determinare λ_F.** Si guarda la crescita per $t \to +\infty$. Un fattore e^{at} sposta l'ascissa verso $\operatorname{Re} a$. Una funzione a supporto compatto ha ascissa $-\infty$.

7. **Controllare la forma finale.** La risposta deve indicare sia $f(s)$, sia il semipiano di convergenza.

Esercizi.

1. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)t^2 e^{-3t}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.3.1

2. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)t\cos(4t).$$

3. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t-2)(t-2)^3 e^{t-2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.3.3

4. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{e^{2t} - e^{-t}}{t}.$$

5. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-t}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.3.5

6. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 + t, & 0 \leq t < 1, \\ 3 - t, & 1 \leq t < 3, \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

7. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione causale periodica di periodo $T = 3$ definita su $[0, 3)$ da

$$F(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1, \\ t, & 1 \le t < 3. \end{cases}$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.3.7

8. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{1 - \cos(4t)}{\sqrt{t}}e^{-t}.$$

9. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{d}{dt}\left((t^2 + 2)e^{-t}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.3.9

10. Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\left[J_0(2t) * \cos(3t)\right].$$

9.4 Antitrasformate

In questa categoria e' data una funzione $f(s)$ e bisogna determinare una funzione causale $F(t)$ tale che

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = f(s)$$

nel semipiano indicato.

Metodo.

1. **Leggere il semipiano di convergenza.** Il semipiano $\operatorname{Re} s > \lambda$ aiuta a scegliere il ramo corretto e a interpretare i fattori esponenziali e^{-as}.

2. **Scomporre la funzione razionale.** Per frazioni razionali si usa la decomposizione in fratti semplici. Poli semplici producono esponenziali, poli multipli producono termini $t^k e^{at}$.

3. **Completare il quadrato.** Denominatori quadratici del tipo

$$(s - a)^2 + \omega^2$$

si riconducono a seni e coseni moltiplicati per e^{at}.

4. **Gestire i ritardi.** Un fattore e^{-as}, con $a > 0$, corrisponde a una traslazione:

$$e^{-as}g(s) \longleftrightarrow H(t - a)G(t - a).$$

5. **Usare la convoluzione.** Se $f(s) = g(s)h(s)$, allora si puo' scrivere

$$F = G * H.$$

Questo e' utile quando il prodotto evita fratti semplici troppo lunghi.

6. **Riconoscere logaritmi e radici.** Espressioni come

$$\log\left(\frac{s + a}{s + b}\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{s + a}},$$

si trattano con le formule notevoli e con gli sviluppi/rami compatibili con il semipiano di convergenza.

7. **Scrivere la funzione causale.** Il risultato finale va espresso con $H(t)$ e, se necessario, con $H(t - a)$.

Esercizi.

1. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+13}, \qquad \operatorname{Re} s > -2.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.4.1

2. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{1}{s(s-2)(s+1)}, \qquad \operatorname{Re} s > 2.$$

3. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)^2(s+3)}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.4.3

4. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{se^{-s}}{s^2-6s+10}, \qquad \operatorname{Re} s > 3.$$

5. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.4.5

6. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \log\left(\frac{s+4}{s+1}\right), \qquad \operatorname{Re} s > -1.$$

7. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s^{5/2}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.4.7

8. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{s+1}{\sqrt{(s+1)^2+9}}, \qquad \operatorname{Re} s > -1.$$

9. Determinare l'antitrasformata di Laplace di
$$f(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s-1)(s^2+4s+8)}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.4.9

9.5 Equazioni differenziali da risolvere con Laplace

In questa categoria si usa la trasformata di Laplace per risolvere problemi di Cauchy in avanti. L'incognita e' una funzione $X(t)$, definita per $t > 0$, con condizioni iniziali assegnate in 0^+.

Metodo.

1. **Porre la trasformata dell'incognita.** Si scrive
$$x(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}(s).$$

2. **Trasformare le derivate.** Si usano le formule
$$\mathcal{L}\{X'\} = sx(s) - X(0^+),$$
$$\mathcal{L}\{X''\} = s^2x(s) - sX(0^+) - X'(0^+).$$
Per ordini superiori si procede allo stesso modo.

3. **Trasformare il termine noto.** Il termine a destra puo' contenere $H(t)$, ritardi $H(t-a)$, potenze, esponenziali, seni, coseni o funzioni a tratti.

4. **Ottenere un'equazione algebrica.** Dopo la trasformazione si raccoglie $x(s)$. Si ottiene
$$P(s)x(s) = Q(s).$$

5. **Risolvere per $x(s)$.** Si calcola
$$x(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

6. **Antitrasformare.** Si usano fratti semplici, traslazioni, convoluzioni o tabelle per tornare a $X(t)$.

7. **Controllare le condizioni iniziali.** La soluzione ottenuta deve soddisfare le condizioni in 0^+ e, se ci sono ritardi, deve essere coerente sui tratti prima e dopo il ritardo.

Esercizi.

1. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X'' - 3X' + 2X = H(t), \qquad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.5.1

2. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X'' + 5X' + 6X = H(t)e^{-t}, \qquad X(0) = 1, \quad X'(0) = -2.$$

3. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X'' - 5X' + 6X = H(t)te^{3t}, \qquad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.5.3

4. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X'' + 2X' + 5X = H(t)\sin(2t), \qquad X(0) = 1, \quad X'(0) = -1.$$

5. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X'' - 5X' + 6X = H(t-2)e^{2(t-2)}, \qquad X(0) = 1, \quad X'(0) = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.5.5

6. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy
$$X''' + 6X'' + 11X' + 6X = H(t), \qquad X(0) = X'(0) = 0, \quad X''(0) = 1.$$

7. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema integro- differenziale
$$X'(t) - 2X(t) + 3\int_0^t X(\tau)\,d\tau = H(t-1), \qquad X(0) = 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.5.7

8. Risolvere con la trasformata di Laplace il problema
$$tX''(t) + 2X'(t) + 4tX(t) = H(t)t, \qquad X(0) = 0, \quad X'(0) = 0.$$

9.6 Integrali di convoluzione da risolvere con Laplace

In questa categoria compaiono integrali del tipo

$$\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau,$$

oppure equazioni in cui l'incognita compare dentro una convoluzione. La trasformata di Laplace trasforma questi integrali in prodotti.

Metodo.

1. **Riconoscere la convoluzione.** Si identifica
$$\int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau = (F*G)(t).$$
2. **Trasformare i fattori.** Si calcolano
$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}(s), \qquad g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}(s).$$
3. **Moltiplicare le trasformate.** Per il teorema della convoluzione,
$$\mathcal{L}\{F*G\}(s) = f(s)g(s).$$
4. **Antitrasformare il prodotto.** Il prodotto ottenuto si tratta come un'antitrasformata: fratti semplici, tabelle, traslazioni o ulteriori riconoscimenti.
5. **Per le equazioni di convoluzione, trasformare tutto.** Se l'incognita Y compare in una convoluzione, si pone
$$y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}(s)$$
e l'equazione diventa algebrica.
6. **Scegliere il ramo corretto.** Se l'equazione algebrica e' quadratica o contiene radici, si sceglie il ramo che rende $y(s) \to 0$ per $s \to +\infty$, quando la soluzione e' una funzione causale ordinaria.

Esercizi.

1. Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare
$$h(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 9.6.1
2. Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare
$$h(t) = \int_0^t \cos(3\tau)e^{-(t-\tau)}\,d\tau.$$
3. Date
$$F(t) = H(t)\sin(2t), \qquad G(t) = H(t)\cos(3t),$$
calcolare $(F*G)(t)$ usando la trasformata di Laplace. Vai alla soluzione dell'esercizio 9.6.3
4. Date
$$F(t) = H(t)t, \qquad G(t) = H(t)e^{-t}\sin t,$$
calcolare $(F*G)(t)$ usando la trasformata di Laplace.

5. Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare

$$h(t) = \int_0^t J_0(2\tau)\cos(3(t-\tau))\,d\tau.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.6.5

6. Risolvere, per $t > 0$, l'equazione di convoluzione

$$4\int_0^t Y(\tau)Y(t-\tau)\,d\tau = Y(t) + 4tH(t) - H(t).$$

7. Risolvere, per $t > 0$, l'equazione

$$Y(t) + 2\int_0^t \sin(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau = H(t)e^t.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 9.6.7

8. Risolvere, per $t > 0$, l'equazione integro-differenziale

$$(Y * Y')(t) = H(t)\sinh t, \qquad Y(0) = 0.$$

9.7 Problemi teorici

In questa categoria non sempre si richiede il calcolo esplicito della trasformata. Spesso bisogna stabilire se una funzione e' trasformabile secondo Laplace, trovare l'ascissa di convergenza o descrivere le proprieta' della trasformata.

Metodo.

1. **Controllare il comportamento vicino a 0.** Una singolarita' in 0 e' accettabile se e' localmente integrabile. Per esempio t^α e' localmente integrabile vicino a 0 se $\alpha > -1$.

2. **Controllare la crescita all'infinito.** Una funzione F e' trasformabile in un semipiano se cresce al piu' esponenzialmente:
$$|F(t)| \le Ce^{\lambda t} \qquad (t \to +\infty).$$

3. **Riconoscere il supporto compatto.** Se F ha supporto compatto ed e' localmente integrabile, allora la trasformata converge per ogni s, quindi
$$\lambda_F = -\infty.$$

4. **Individuare casi non trasformabili.** Funzioni con crescita piu' che esponenziale, come e^{t^2} su una semiretta infinita, non sono trasformabili secondo Laplace.

5. **Dedurre proprieta' della trasformata.** Nel semipiano di convergenza la trasformata e' olomorfa. Inoltre, derivare rispetto a s corrisponde a moltiplicare la funzione per potenze di $-t$.

6. **Usare stime semplici.** Per dimostrare la trasformabilita' basta spesso maggiorare $F(t)$ con una funzione di cui si conosce gia' la trasformata.

Esercizi.

1. Verificare che la funzione
$$F(t) = H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-2t^2}$$
e' trasformabile secondo Laplace e determinarne l'ascissa di convergenza. Vai alla soluzione dell'esercizio 9.7.1

2. Verificare che la funzione
$$F(t) = \chi_{(0,4)}(t)\log t$$
e' trasformabile secondo Laplace e determinarne l'ascissa di convergenza.

3. Stabilire se la funzione
$$F(t) = H(t)te^{t^3}$$
e' trasformabile secondo Laplace. Vai alla soluzione dell'esercizio 9.7.3

4. Stabilire se la funzione
$$F(t) = H(t)\frac{1}{(t-2)^2}$$
e' trasformabile secondo Laplace.

5. Verificare che la funzione
$$F(t) = e^{t^2}\chi_{[1,3]}(t)$$
e' trasformabile secondo Laplace e indicare λ_F. Vai alla soluzione dell'esercizio 9.7.5

6. Date
$$F(t) = H(t)\frac{1-\cos(3t)}{t^2}e^{-2t^2},$$
verificare che $\lambda_F = -\infty$, senza calcolare esplicitamente la trasformata.

7. Sia $F \in L^1_{\text{loc}}([0,+\infty))$ tale che
$$|F(t)| \le C(1+t^4)e^{2t}.$$
Dimostrare che F e' trasformabile per $\operatorname{Re} s > 2$. Vai alla soluzione dell'esercizio 9.7.7

8. Sia F trasformabile secondo Laplace con ascissa λ_F. Indicare in quale semipiano e' trasformabile $G(t) = e^{3t}F(t)$.

9.8 Soluzioni degli esercizi

9.8.1 Calcolo delle trasformate

Soluzione esercizio 9.3.1 Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di
$$F(t) = H(t)t^2e^{-3t}.$$

Soluzione. Metodo: trasformata della potenza e traslazione esponenziale. Per $t \ge 0$ si ha
$$F(t) = t^2e^{-3t}.$$

Usiamo
$$\mathcal{L}\{H(t)t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}.$$
Trasformata notevole. Formula $\mathcal{L}\{H(t)t^n\}(s) = n!/s^{n+1}$ con $n = 2$.

Il fattore e^{-3t} produce la traslazione $s \mapsto s+3$. Quindi
$$\mathcal{L}\{H(t)t^2e^{-3t}\}(s) = \frac{2}{(s+3)^3}.$$

Trasformata di Laplace: traslazione esponenziale.

La crescita all'infinito e' quella di un polinomio moltiplicato per e^{-3t}. Pertanto la convergenza si ha per

$$\mathrm{Re}(s+3) > 0 \iff \mathrm{Re}\, s > -3.$$

Ascissa di convergenza.

Risultato:

$$\boxed{f(s) = \frac{2}{(s+3)^3}, \qquad \lambda_F = -3.}$$

Torna all'esercizio 9.3.1

Soluzione esercizio 9.3.3 Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t-2)(t-2)^3 e^{t-2}.$$

Soluzione. Metodo: ritardo temporale. Scriviamo la funzione nella forma

$$F(t) = H(t-2)G(t-2), \qquad G(u) = u^3 e^u.$$

Riscrittura. La variabile ritardata e' $u = t-2$.

Calcoliamo prima la trasformata di $H(u)G(u)$:

$$\mathcal{L}\{H(u)u^3 e^u\}(s) = \frac{6}{(s-1)^4}.$$

Trasformata notevole. Formula della potenza con $n=3$ e traslazione esponenziale $s \mapsto s-1$.

Applicando il ritardo temporale,

$$\mathcal{L}\{H(t-2)G(t-2)\}(s) = e^{-2s}\frac{6}{(s-1)^4}.$$

Trasformata di Laplace: traslazione nel tempo.

La trasformata di $u^3 e^u$ converge per

$$\mathrm{Re}(s-1) > 0 \iff \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Il fattore e^{-2s} non cambia il semipiano di convergenza.

Risultato:

$$\boxed{f(s) = \frac{6e^{-2s}}{(s-1)^4}, \qquad \lambda_F = 1.}$$

Torna all'esercizio 9.3.3

Soluzione esercizio 9.3.5 Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-t}.$$

Soluzione. Metodo: formula di divisione per t e traslazione esponenziale. Poniamo

$$G(t) = H(t)\frac{\sin(5t)}{t}.$$

Per calcolare $\mathcal{L}\{G\}$, partiamo da

$$\mathcal{L}\{H(t)\sin(5t)\}(s) = \frac{5}{s^2+25}.$$

Trasformata notevole del seno.

Usando la formula di divisione per t,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{H(t)\frac{\sin(5t)}{t}\right\}(s) &= \int_s^{+\infty} \frac{5}{\sigma^2+25}\,d\sigma \\ &= \arctan\left(\frac{5}{s}\right).\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Trasformata di Laplace: divisione per t.
Seconda uguaglianza. Il ramo e' scelto in modo che la trasformata tenda a 0 per $s \to +\infty$.

Ora il fattore e^{-t} produce la traslazione $s \mapsto s+1$. Quindi

$$\mathcal{L}\left\{H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-t}\right\}(s) = \arctan\left(\frac{5}{s+1}\right).$$

Trasformata di Laplace: traslazione esponenziale.

La funzione $\sin(5t)/t$ e' limitata vicino a 0 e il fattore esponenziale e' e^{-t}. La convergenza nel semipiano si ha per

$$\operatorname{Re}(s+1) > 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} s > -1.$$

Ascissa di convergenza.

Risultato:

$$\boxed{f(s) = \arctan\left(\frac{5}{s+1}\right), \qquad \lambda_F = -1.}$$

Torna all'esercizio 9.3.5

Soluzione esercizio 9.3.7 Calcolare la trasformata di Laplace della funzione causale periodica di periodo $T = 3$ definita su $[0, 3)$ da

$$F(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1, \\ t, & 1 \le t < 3. \end{cases}$$

Soluzione. Metodo: formula per funzioni causali periodiche. Poiche' F e' periodica di periodo $T = 3$, si usa

$$\mathcal{L}\{H(t)F(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-3s}} \int_0^3 e^{-st}F(t)\,dt.$$

Trasformata di Laplace: funzione periodica causale.

Sul periodo fondamentale la funzione cambia formula in $t = 1$. Quindi

$$\int_0^3 e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^1 2e^{-st}\,dt + \int_1^3 te^{-st}\,dt.$$

Estremi di integrazione. Si integrano separatamente i tratti $[0, 1]$ e $[1, 3]$, perche' su questi tratti cambia la formula di F.

Calcoliamo i due contributi:

$$\int_0^1 2e^{-st}\,dt = \frac{2(1-e^{-s})}{s},$$

e

$$\int_1^3 te^{-st}\,dt = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{3e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2}.$$

Secondo integrale. Integrazione per parti.

Sostituendo nella formula periodica,

$$f(s) = \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[\frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{3e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2}\right].$$

Formula finale. Somma dei due contributi calcolati sul periodo fondamentale.

La funzione periodica e' limitata e non tende a zero all'infinito; quindi il semipiano di convergenza e'

$$\operatorname{Re} s > 0.$$

Ascissa di convergenza per funzioni periodiche limitate non nulle.

Risultato:

$$\boxed{f(s) = \frac{1}{1-e^{-3s}}\left[\frac{2}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{3e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s^2}\right], \qquad \lambda_F = 0.}$$

Torna all'esercizio 9.3.7

Soluzione esercizio 9.3.9 Calcolare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza di

$$F(t) = H(t)\frac{d}{dt}\left((t^2+2)e^{-t}\right).$$

Soluzione. Metodo: calcolo della derivata ordinaria e uso delle trasformate notevoli. La derivata che compare nell'esercizio e' la derivata ordinaria della funzione $(t^2+2)e^{-t}$, poi moltiplicata per $H(t)$. Dunque

$$\frac{d}{dt}\left((t^2+2)e^{-t}\right) = (-t^2+2t-2)e^{-t}.$$

Derivazione ordinaria.

Quindi

$$F(t) = H(t)(-t^2+2t-2)e^{-t}.$$

Applicando linearita' e traslazione esponenziale,

$$\begin{aligned} f(s) &= -\frac{2}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1} \\ &= -\frac{2(s^2+s+1)}{(s+1)^3}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Si usano $\mathcal{L}\{H(t)t^2e^{-t}\} = 2/(s+1)^3$, $\mathcal{L}\{H(t)te^{-t}\} = 1/(s+1)^2$ e $\mathcal{L}\{H(t)e^{-t}\} = 1/(s+1)$.
Seconda uguaglianza. Semplificazione algebrica.

La crescita e' polinomiale moltiplicata per e^{-t}. Quindi

$$\operatorname{Re}(s+1) > 0 \iff \operatorname{Re} s > -1.$$

Ascissa di convergenza.

Risultato:

$$\boxed{f(s) = -\frac{2(s^2+s+1)}{(s+1)^3}, \qquad \lambda_F = -1.}$$

Torna all'esercizio 9.3.9

9.8.2 Antitrasformate

Soluzione esercizio 9.4.1 Determinare l'antitrasformata di Laplace di

$$f(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+13}, \qquad \operatorname{Re} s > -2.$$

Soluzione. Metodo: completamento del quadrato e trasformate notevoli di seno e coseno. Riscriviamo il denominatore rispetto al centro $s = -2$:

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2+9.$$

Completamento del quadrato.

Allora

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \frac{3(s+2)-1}{(s+2)^2+9} \\
&= 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{1}{(s+2)^2+9}.
\end{aligned}
$$

Prima uguaglianza. Riscrittura del numeratore $3s+5 = 3(s+2)-1$.
Seconda uguaglianza. Separazione nelle due trasformate notevoli.

Usando le formule di traslazione esponenziale,

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right\} = H(t)e^{-2t}\cos(3t),
$$

e

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+9}\right\} = \frac{1}{3}H(t)e^{-2t}\sin(3t).
$$

Trasformate notevoli di coseno e seno con traslazione $s \mapsto s+2$.

Quindi

$$
F(t) = H(t)e^{-2t}\left(3\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t)\right).
$$

Antitrasformata ottenuta per linearita'.

Risultato:

$$
\boxed{F(t) = H(t)e^{-2t}\left(3\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t)\right).}
$$

Torna all'esercizio 9.4.1

Soluzione esercizio 9.4.3 Determinare l'antitrasformata di Laplace di

$$
f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)^2(s+3)}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.
$$

Soluzione. Metodo: fratti semplici e ritardo temporale. Prima si antitrasforma la parte senza il fattore e^{-2s}:

$$
g(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+3)}.
$$

La decomposizione in fratti semplici e'

$$
g(s) = \frac{1}{16}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{16}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}.
$$

Fratti semplici.

Dalla decomposizione in fratti semplici segue

$$
G(t) = H(t)\left(\frac{1}{16}e^{-3t} - \frac{1}{16}e^{t} + \frac{1}{4}te^{t}\right).
$$

Antitrasformata della parte senza ritardo.

Il fattore e^{-2s} produce un ritardo di ampiezza 2. Quindi

$$
F(t) = H(t-2)\left[\frac{1}{16}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{16}e^{t-2} + \frac{1}{4}(t-2)e^{t-2}\right].
$$

Trasformata di Laplace: traslazione nel tempo.

Risultato:

$$
\boxed{F(t) = H(t-2)\left[\frac{1}{16}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{16}e^{t-2} + \frac{1}{4}(t-2)e^{t-2}\right].}
$$

Torna all'esercizio 9.4.3

Soluzione esercizio 9.4.5 Determinare l'antitrasformata di Laplace di

$$f(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Soluzione. Metodo: fratti semplici con un polo doppio e una coppia di poli complessi coniugati. La decomposizione e'

$$\frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)} = \frac{4}{25}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{4}{25}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1}.$$

Fratti semplici.

Antitrasformando termine a termine,

$$F(t) = H(t)\left(\frac{4}{25}e^{-2t} + \frac{1}{5}te^{-2t} - \frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t\right).$$

Antitrasformata termine a termine.

Risultato:

$$\boxed{F(t) = H(t)\left(\frac{4}{25}e^{-2t} + \frac{1}{5}te^{-2t} - \frac{4}{25}\cos t + \frac{3}{25}\sin t\right).}$$

Torna all'esercizio 9.4.5

Soluzione esercizio 9.4.7 Determinare l'antitrasformata di Laplace di

$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s^{5/2}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.$$

Soluzione. Metodo: formula con la funzione Gamma e ritardo temporale. Si usa la formula

$$\mathcal{L}\left\{H(t)\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\}(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Trasformata notevole con funzione Gamma.

Nel caso presente $\alpha = 5/2$, quindi

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Valore della funzione Gamma.

Pertanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}(t) = H(t)\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}.$$

Formula precedente con $\alpha = 5/2$.

Il fattore e^{-3s} produce un ritardo di ampiezza 3. Quindi

$$F(t) = H(t-3)\frac{4}{3\sqrt{\pi}}(t-3)^{3/2}.$$

Trasformata di Laplace: traslazione nel tempo.

Risultato:

$$\boxed{F(t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}H(t-3)(t-3)^{3/2}.}$$

Torna all'esercizio 9.4.7

Soluzione esercizio 9.4.9 Determinare l'antitrasformata di Laplace di

$$f(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s-1)(s^2+4s+8)}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Soluzione. Metodo: fratti semplici e completamento del quadrato. La decomposizione in fratti semplici e'

$$f(s) = \frac{8}{13}\frac{1}{s-1} + \frac{5s-1}{13(s^2+4s+8)}.$$

Fratti semplici.

Per il termine quadratico,

$$s^2+4s+8 = (s+2)^2+4, \qquad 5s-1 = 5(s+2)-11.$$

Completamento del quadrato e riscrittura del numeratore.

Quindi

$$f(s) = \frac{8}{13}\frac{1}{s-1} + \frac{5}{13}\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{11}{13}\frac{1}{(s+2)^2+4}.$$

Riscrittura in trasformate notevoli.

Quindi

$$F(t) = H(t)\left(\frac{8}{13}e^t + \frac{5}{13}e^{-2t}\cos(2t) - \frac{11}{26}e^{-2t}\sin(2t)\right).$$

Antitrasformata termine a termine.

Risultato:

$$\boxed{F(t) = H(t)\left(\frac{8}{13}e^t + \frac{5}{13}e^{-2t}\cos(2t) - \frac{11}{26}e^{-2t}\sin(2t)\right).}$$

Torna all'esercizio 9.4.9

9.8.3 Equazioni differenziali da risolvere con Laplace

Soluzione esercizio 9.5.1 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$X'' - 3X' + 2X = H(t), \qquad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace del problema di Cauchy e fratti semplici. Poniamo

$$x(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}(s).$$

Applicando la trasformata di Laplace all'equazione,

$$(s^2x(s)-1) - 3sx(s) + 2x(s) = \frac{1}{s}.$$

Trasformata delle derivate. Sono stati usati $X(0) = 0$ e $X'(0) = 1$.
Termine noto. $\mathcal{L}\{H(t)\} = 1/s$.

Quindi

$$\begin{aligned}(s^2-3s+2)x(s) &= 1 + \frac{1}{s},\\ x(s) &= \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)}\\ &= \frac{1}{2s} - \frac{2}{s-1} + \frac{3}{2(s-2)}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Raccolta di $x(s)$.
Terza uguaglianza. Fratti semplici.

Antitrasformando termine a termine,

$$X(t) = H(t)\left(\frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t}\right).$$

Antitrasformata di Laplace termine a termine.
Risultato:

$$\boxed{X(t) = H(t)\left(\frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t}\right).}$$

Torna all'esercizio 9.5.1

Soluzione esercizio 9.5.3 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$X'' - 5X' + 6X = H(t)te^{3t}, \qquad X(0) = 0, \quad X'(0) = 1.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace del problema di Cauchy e fratti semplici. Poniamo

$$x(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}(s).$$

Il termine noto ha trasformata

$$\mathcal{L}\{H(t)te^{3t}\}(s) = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Trasformata della potenza con traslazione esponenziale.
Applicando la trasformata all'equazione,

$$(s^2x(s) - 1) - 5sx(s) + 6x(s) = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Trasformata delle derivate. Sono stati usati $X(0) = 0$ e $X'(0) = 1$.
Quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1 + \dfrac{1}{(s-3)^2}}{(s-2)(s-3)} \\ &= -\frac{2}{s-2} + \frac{2}{s-3} - \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^3}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Risoluzione dell'equazione algebrica in $x(s)$.
Seconda uguaglianza. Fratti semplici.
Antitrasformando termine a termine,

$$X(t) = H(t)\left(-2e^{2t} + 2e^{3t} - te^{3t} + \frac{t^2}{2}e^{3t}\right).$$

Antitrasformata di Laplace termine a termine.
Risultato:

$$\boxed{X(t) = H(t)\left(-2e^{2t} + 2e^{3t} - te^{3t} + \frac{t^2}{2}e^{3t}\right).}$$

Torna all'esercizio 9.5.3

Soluzione esercizio 9.5.5 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$X'' - 5X' + 6X = H(t-2)e^{2(t-2)}, \qquad X(0) = 1, \quad X'(0) = 0.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace con termine ritardato. Poniamo

$$x(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}(s).$$

Il termine noto e' ritardato:
$$\mathcal{L}\{H(t-2)e^{2(t-2)}\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s-2}.$$
Trasformata di Laplace: traslazione nel tempo.

Applicando la trasformata all'equazione,
$$(s^2x(s) - s) - 5(sx(s) - 1) + 6x(s) = \frac{e^{-2s}}{s-2}.$$
Trasformata delle derivate. Sono stati usati $X(0) = 1$ e $X'(0) = 0$.

Quindi
$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s-5}{(s-2)(s-3)} + e^{-2s}\frac{1}{(s-2)^2(s-3)} \\ &= \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s-3} + e^{-2s}\left(-\frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-3}\right). \end{aligned}$$
Prima uguaglianza. Risoluzione dell'equazione algebrica in $x(s)$.
Seconda uguaglianza, primi due termini. Fratti semplici della parte non ritardata.
Seconda uguaglianza, termine tra parentesi. Fratti semplici della parte ritardata.

Antitrasformando,
$$\begin{aligned} X(t) = &\, H(t)\left(3e^{2t} - 2e^{3t}\right) \\ &+ H(t-2)\left[-e^{2(t-2)} - (t-2)e^{2(t-2)} + e^{3(t-2)}\right]. \end{aligned}$$
Prima riga. Antitrasformata della parte senza ritardo.
Seconda riga. Antitrasformata della parte moltiplicata per e^{-2s}.

Risultato:
$$\boxed{\begin{aligned} X(t) = &\, H(t)\left(3e^{2t} - 2e^{3t}\right) \\ &+ H(t-2)\left[-e^{2(t-2)} - (t-2)e^{2(t-2)} + e^{3(t-2)}\right]. \end{aligned}}$$
Torna all'esercizio 9.5.5

Soluzione esercizio 9.5.7 Risolvere con la trasformata di Laplace il problema integro- differenziale
$$X'(t) - 2X(t) + 3\int_0^t X(\tau)\,d\tau = H(t-1), \qquad X(0) = 1.$$
Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace dell'integrale come divisione per s. Poniamo
$$x(s) = \mathcal{L}\{X(t)\}(s).$$
I termini non differenziali si trasformano come
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t X(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{x(s)}{s}, \qquad \mathcal{L}\{H(t-1)\}(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$
Primo termine. Trasformata dell'integrale causale.
Secondo termine. Trasformata di Laplace: traslazione nel tempo.

Applicando la trasformata all'equazione,
$$(sx(s) - 1) - 2x(s) + 3\frac{x(s)}{s} = \frac{e^{-s}}{s}.$$
Trasformata della derivata. E' stato usato $X(0) = 1$.
$$(s^2 - 2s + 3)x(s) = s + e^{-s}.$$
Moltiplicazione per s.

Quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s}{(s-1)^2+2} + e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2+2} \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+2} + \frac{1}{(s-1)^2+2} + e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2+2}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Risoluzione dell'equazione algebrica in $x(s)$.
Seconda uguaglianza. Riscrittura del numeratore $s = (s-1)+1$.

Poiche' $2 = (\sqrt{2})^2$, l'antitrasformata e'

$$X(t) = H(t)e^t \left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}H(t-1)e^{t-1}\sin(\sqrt{2}(t-1)).$$

Antitrasformata dei primi due termini. Trasformate notevoli di seno e coseno con traslazione esponenziale.
Antitrasformata dell'ultimo termine. Ritardo di ampiezza 1.

Risultato:

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) = H(t)e^t &\left(\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}H(t-1)e^{t-1}\sin(\sqrt{2}(t-1)). \end{aligned}}$$

Torna all'esercizio 9.5.7

9.8.4 Integrali di convoluzione da risolvere con Laplace

Soluzione esercizio 9.6.1 Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare

$$h(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau.$$

Soluzione. Metodo: riconoscimento della convoluzione e teorema della convoluzione. L'integrale si scrive come

$$h(t) = \left(H(t)e^{-2t}\right) * \left(H(t)\sin t\right).$$

Riconoscimento della convoluzione.

Le trasformate dei due fattori sono

$$\mathcal{L}\{H(t)e^{-2t}\}(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad \mathcal{L}\{H(t)\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Prima formula. Trasformata notevole dell'esponenziale.
Seconda formula. Trasformata notevole del seno.

Per il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h(t)\}(s) &= \frac{1}{(s+2)(s^2+1)} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Teorema della convoluzione.
Seconda uguaglianza. Fratti semplici.

Antitrasformando termine a termine,

$$h(t) = H(t)\left(\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right).$$

Antitrasformata di Laplace termine a termine.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = H(t)\left(\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right).}$$

Torna all'esercizio 9.6.1

Soluzione esercizio 9.6.3 Date

$$F(t) = H(t)\sin(2t), \qquad G(t) = H(t)\cos(3t),$$

calcolare $(F * G)(t)$ usando la trasformata di Laplace.

Soluzione. Metodo: teorema della convoluzione. Calcoliamo le trasformate dei due fattori:

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(s) = \frac{2}{s^2+4}, \qquad \mathcal{L}\{G(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+9}.$$

Prima formula. Trasformata notevole del seno.
Seconda formula. Trasformata notevole del coseno.

Per il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(F * G)(t)\}(s) &= \frac{2s}{(s^2+4)(s^2+9)} \\ &= \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+9}.\end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Teorema della convoluzione.
Seconda uguaglianza. Fratti semplici.

Antitrasformando,

$$(F * G)(t) = H(t)\left(\frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\cos(3t)\right).$$

Antitrasformata di Laplace termine a termine.

Risultato:

$$\boxed{(F * G)(t) = \frac{2}{5}H(t)\left(\cos(2t) - \cos(3t)\right).}$$

Torna all'esercizio 9.6.3

Soluzione esercizio 9.6.5 Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare

$$h(t) = \int_0^t J_0(2\tau)\cos(3(t-\tau))\,d\tau.$$

Soluzione. Metodo: riconoscimento della convoluzione e trasformata di J_0. L'integrale e' la convoluzione

$$h(t) = (H(t)J_0(2t)) * (H(t)\cos(3t)).$$

Riconoscimento della convoluzione.

Le trasformate dei due fattori sono

$$\mathcal{L}\{H(t)J_0(2t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+4}}, \qquad \mathcal{L}\{H(t)\cos(3t)\}(s) = \frac{s}{s^2+9}.$$

Prima trasformata. Trasformata notevole della funzione di Bessel J_0.
Seconda trasformata. Trasformata notevole del coseno.

Per il teorema della convoluzione,

$$\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{s}{(s^2+9)\sqrt{s^2+4}}.$$

Teorema della convoluzione.

Questa antitrasformata non si riduce, con le tabelle elementari usate fin qui, a una combinazione finita di esponenziali, seni, coseni e potenze. La forma determinata tramite Laplace e'

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+9)\sqrt{s^2+4}}\right\}(t).$$

Antitrasformata tabellare/speciale.

Equivalentemente, h e' la soluzione causale del problema

$$h''(t) + 9h(t) = -2J_1(2t), \qquad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1.$$

Forma differenziale equivalente. Si usa $\frac{d}{dt}J_0(2t) = -2J_1(2t)$.

Risultato:

$$\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+9)\sqrt{s^2+4}}\right\}(t).}$$

Torna all'esercizio 9.6.5

Soluzione esercizio 9.6.7 Risolvere, per $t > 0$, l'equazione

$$Y(t) + 2\int_0^t \sin(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau = H(t)e^t.$$

Soluzione. Metodo: trasformata di Laplace dell'equazione di convoluzione. Poniamo

$$y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}(s).$$

L'integrale e' la convoluzione

$$\int_0^t \sin(t-\tau)Y(\tau)\,d\tau = (H(t)\sin t) * Y(t).$$

Riconoscimento della convoluzione.

Applicando la trasformata di Laplace,

$$y(s) + 2\frac{1}{s^2+1}y(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Lato sinistro. Teorema della convoluzione.
Lato destro. Trasformata di $H(t)e^t$.

Quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+3)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+3}. \end{aligned}$$

Prima uguaglianza. Risoluzione dell'equazione algebrica in $y(s)$.
Seconda uguaglianza. Fratti semplici.

Antitrasformando termine a termine,

$$Y(t) = H(t)\left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right).$$

Antitrasformata di Laplace termine a termine.

Risultato:

$$\boxed{Y(t) = H(t)\left(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right).}$$

Torna all'esercizio 9.6.7

9.8.5 Problemi teorici

Soluzione esercizio 9.7.1 Verificare che la funzione

$$F(t) = H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-2t^2}$$

e' trasformabile secondo Laplace e determinarne l'ascissa di convergenza.

Soluzione. Metodo: controllo locale in 0 e stima gaussiana all'infinito. Vicino a 0 si ha

$$\frac{\sin(5t)}{t} \longrightarrow 5.$$

Comportamento locale. La funzione e' localmente integrabile in 0.

Sia $s \in \mathbb{C}$. Per $t \geq 1$,

$$\left| e^{-st}H(t)\frac{\sin(5t)}{t}e^{-2t^2} \right| \leq e^{-\operatorname{Re}(s)t}e^{-2t^2} \leq e^{|\operatorname{Re}(s)|t-2t^2}.$$

Prima disuguaglianza. Stima $|\sin(5t)|/t \leq 1$ per $t \geq 1$.
Seconda disuguaglianza. Stima uniforme rispetto al segno di $\operatorname{Re}(s)$.

La funzione maggiorante

$$e^{|\operatorname{Re}(s)|t-2t^2}$$

e' integrabile in $[1, +\infty)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$. Dominazione gaussiana.

Quindi la trasformata converge per ogni $s \in \mathbb{C}$. Pertanto

$$\boxed{\lambda_F = -\infty.}$$

Torna all'esercizio 9.7.1

Soluzione esercizio 9.7.3 Stabilire se la funzione

$$F(t) = H(t)te^{t^3}$$

e' trasformabile secondo Laplace.

Soluzione. Metodo: confronto della crescita all'infinito con l'esponenziale e^{st}. Per $\sigma = \operatorname{Re} s$, l'integrale assoluto contiene il termine

$$\int_0^{+\infty} te^{t^3-\sigma t}\,dt.$$

Definizione della trasformata di Laplace. Si considera $|e^{-st}F(t)| = te^{t^3-\sigma t}$ per $t > 0$.

Per t grande,

$$t^3 - \sigma t \longrightarrow +\infty.$$

Crescita cubica. Il termine t^3 domina il termine lineare σt.

Quindi $e^{-st}F(t)$ non e' integrabile in $[0, +\infty)$ per nessun $s \in \mathbb{C}$. La funzione non ha crescita al piu' esponenziale.

Risultato:

$$\boxed{F(t) = H(t)te^{t^3} \text{ non e' trasformabile secondo Laplace.}}$$

Torna all'esercizio 9.7.3

Soluzione esercizio 9.7.5 Verificare che la funzione

$$F(t) = e^{t^2}\chi_{[1,3]}(t)$$

e' trasformabile secondo Laplace e indicare λ_F.

Soluzione. Metodo: supporto compatto. La funzione e' nulla fuori dall'intervallo $[1, 3]$. Quindi, per ogni $s \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt = \int_1^3 e^{-st}e^{t^2}\,dt.$$

Supporto compatto.

L'integrando $e^{-st}e^{t^2}$ e' continuo sull'intervallo compatto $[1, 3]$. Pertanto l'integrale converge per ogni $s \in \mathbb{C}$.

Risultato:

$$\boxed{\lambda_F = -\infty.}$$

Torna all'esercizio 9.7.5

Soluzione esercizio 9.7.7 Sia $F \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty))$ tale che

$$|F(t)| \leq C(1 + t^4)e^{2t}.$$

Dimostrare che F e' trasformabile per $\operatorname{Re} s > 2$.

Soluzione. Metodo: stima diretta nel semipiano $\operatorname{Re} s > 2$. Sia

$$\sigma = \operatorname{Re} s > 2.$$

Allora

$$|e^{-st}F(t)| \leq C(1 + t^4)e^{-(\sigma-2)t}.$$

Stima. Si usa $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$ e l'ipotesi su F.

La funzione

$$(1 + t^4)e^{-(\sigma-2)t}$$

e' integrabile in $[0, +\infty)$, perche' $\sigma - 2 > 0$. Criterio di convergenza. Polinomio moltiplicato per esponenziale decrescente.

Poiche' $F \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty))$, non ci sono problemi di integrabilita' sugli intervalli limitati. Quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

converge assolutamente per ogni s tale che $\operatorname{Re} s > 2$.

Risultato:

$$\boxed{F \text{ e' trasformabile nel semipiano } \operatorname{Re} s > 2.}$$

Torna all'esercizio 9.7.7

10 Trasformata Z

10.1 Introduzione

La trasformata Z associa a una successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una funzione complessa della variabile z. In queste note useremo la trasformata Z unilatera

$$F^*(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}.$$

L'insieme di convergenza sara' indicato con A. Per le successioni che compaiono negli esercizi, A e' di solito l'esterno di un disco:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}.$$

10.2 Formule fondamentali

1. **Linearita'.**
$$\mathcal{Z}\{\alpha f_n + \beta g_n\} = \alpha \mathcal{Z}\{f_n\} + \beta \mathcal{Z}\{g_n\}.$$
L'insieme di convergenza e' l'intersezione degli insiemi di convergenza dei singoli termini.

2. **Successione costante.**
$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

3. **Potenza geometrica.**
$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \frac{z}{z-a}, \qquad A = \{|z| > |a|\}.$$

4. **Moltiplicazione per n.**
$$\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}.$$

5. **Prime potenze di n.**
$$\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad \mathcal{Z}\{n^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$
Inoltre
$$\mathcal{Z}\{n^3\} = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

6. **Potenze geometriche moltiplicate per n.**
$$\mathcal{Z}\{na^n\} = \frac{az}{(z-a)^2}, \qquad \mathcal{Z}\{n^2a^n\} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}.$$

7. **Seno e coseno.**
$$\mathcal{Z}\{\cos(an)\} = \frac{z(z-\cos a)}{z^2-2z\cos a+1}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$
$$\mathcal{Z}\{\sin(an)\} = \frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

8. **Antiderivazione discreta.** Se $f_0 = 0$, allora spesso e' utile la relazione
$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f_n}{n}\right\} = \int_z^{+\infty} \frac{\mathcal{Z}\{f_n\}(s)}{s}\,ds.$$

9. **Avanzamento della successione.**
$$\mathcal{Z}\{f_{n+1}\} = z\left(F^*(z) - f_0\right).$$
Piu' in generale
$$\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k\left(F^*(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^{-j}\right).$$

10.3 Calcolare la trasformata Z di una successione

In questa categoria e' data una successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ e bisogna calcolare
$$F^*(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}(z)$$
insieme all'insieme di convergenza A.

Metodo.

1. **Scomporre la successione.** Separare f_n in termini elementari: polinomi in n, potenze a^n, seni, coseni, prodotti come na^n, somme di questi termini.

2. **Applicare le formule note.** Usare la linearita' e le formule della tabella. Per i fattori n si usa

$$\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}.$$

3. **Gestire seno e coseno.** Per termini come $n\sin(an)$ o $n\cos(an)$, si parte dalla trasformata trigonometrica di base e si deriva rispetto a z.

4. **Determinare l'insieme di convergenza.** Per una somma di termini, l'insieme di convergenza e' l'intersezione degli insiemi di convergenza. Per esempio, se compaiono 2^n e $(-3)^n$, allora

$$A = \{|z| > 3\}.$$

5. **Controllare la forma finale.** Alla fine si semplifica la formula e si conserva l'informazione su A.

Esercizi.

1. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = 1$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.1

2. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = 2^n$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

3. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.3

4. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n + 4$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

5. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (-3)^n$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

   Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.5

6. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^2 + 3n - 1$$

   e determinarne l'insieme di convergenza A.

7. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^3 + 2n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.7

8. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n \sin(2n)$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

9. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (n+2)^2 \cos n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.9

10. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n \sin n + 3^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

11. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^2 \cos(3n) + (-2)^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.11

12. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^2 - 5n + 6$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

13. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (n+1)^3$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.13

14. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = 2^n + (-4)^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

15. Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n\, 4^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.15

16. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = n^2\, 2^n$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.

17. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = n \cos(2n)$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.17

18. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = (n-1)^2 \sin(3n)$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.

19. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = n \sin(4n) + e^{-n}$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.19

20. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = n^2 \cos(2n) + \frac{2^n}{n+1}$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.

21. Calcolare la trasformata Z della successione
$$f_n = (n+1)^2 \sin n + \frac{(-3)^n}{n+1}$$
e determinarne l'insieme di convergenza A.
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.3.21

10.4 Determinare la successione dalla trasformata Z

In questa categoria e' data la funzione $F^*(z)$ e bisogna ricostruire la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ tale che
$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}.$$

Metodo.

1. **Leggere l'insieme di convergenza.** L'insieme di convergenza stabilisce quale sviluppo in serie usare. Se $A = \{|z| > R\}$, bisogna sviluppare in potenze di z^{-1}.

2. **Usare la variabile ausiliaria.** Si pone
$$w = \frac{1}{z}.$$
Allora
$$F^*(z) = F^*\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n w^n.$$
Quindi f_n e' il coefficiente di w^n.

3. **Sviluppare in serie.** Per funzioni come esponenziale, seno, coseno, logaritmo o potenze frazionarie si usano gli sviluppi di Taylor centrati in $w = 0$.

4. **Usare le tabelle quando possibile.** Se $F^*(z)$ e' razionale, conviene decomporla in fratti semplici e confrontarla con formule del tipo

$$\frac{z}{z-a} \longleftrightarrow a^n, \qquad \frac{az}{(z-a)^2} \longleftrightarrow na^n.$$

5. **Scrivere la successione finale.** Il risultato va espresso come formula per f_n, specificando eventuali casi particolari per $n = 0$ se lo sviluppo li produce.

Esercizi.

1. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.1

2. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 2$,

$$F^*(z) = \frac{z}{z-2}.$$

3. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.3

4. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z}{z+1}.$$

5. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che

$$F^*(z) = 1 + \frac{3}{z} - \frac{2}{z^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.5

6. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 2$,

$$F^*(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-1)^2}.$$

7. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 3$,

$$F^*(z) = \frac{z(z+1)}{(z-3)^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.7

8. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che

$$F^*(z) = \sin\left(\frac{2}{z}\right) + \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

9. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>2$,

$$F^*(z)=\left(1+\frac{2}{z}\right)^{1/2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.9

10. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>2$,

$$F^*(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}}\right).$$

11. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>1$,

$$F^*(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}+\sinh\left(\frac{3}{z}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.11

12. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>4$,

$$F^*(z)=\frac{z(3z-1)}{(z-2)(z-4)}.$$

13. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>1$,

$$F^*(z)=\frac{z(z+2)}{(z+1)^2}.$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.13

14. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>3$,

$$F^*(z)=\frac{z^2}{(z-3)^2}.$$

15. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che

$$F^*(z)=e^{2/z}+\sin\left(\frac{3}{z}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.15

16. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>3$,

$$F^*(z)=\left(1-\frac{3}{z}\right)^{-1/2}.$$

17. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>3$,

$$F^*(z)=\log\left(1+\frac{3}{z}\right).$$

Vai alla soluzione dell'esercizio 10.4.17

18. Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z|>2$,

$$F^*(z)=\frac{1}{1+2z^{-1}}+\cosh\left(\frac{1}{z}\right).$$

10.5 Equazioni alle differenze con la trasformata Z

In questa categoria si usa la trasformata Z per risolvere ricorrenze lineari con condizioni iniziali. L'incognita e' una successione $\{y_n\}_{n\geq 0}$.

Metodo.

1. **Introdurre la trasformata dell'incognita.** Si pone
$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

2. **Trasformare i termini traslati.** Si usano le formule
$$\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0),$$
$$\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2 Y^*(z) - z^2 y_0 - z y_1.$$

3. **Trasformare il termine noto.** Il termine a destra si trasforma con le formule note: polinomi in n, potenze a^n, prodotti come na^n, seni e coseni.

4. **Ottenere un'equazione algebrica.** Dopo la trasformazione si raccoglie $Y^*(z)$. Si ottiene una relazione del tipo
$$P(z)Y^*(z) = Q(z).$$

5. **Risolvere per $Y^*(z)$.** Si calcola
$$Y^*(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$
A questo punto il problema diventa un esercizio di inversione della trasformata Z.

6. **Invertire la trasformata.** Si decompone $Y^*(z)$ in termini riconoscibili e si ricava y_n. Le condizioni iniziali servono a fissare in modo univoco la soluzione.

Esercizi.

1. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+1} - y_n = 0, \qquad y_0 = 3.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.1

2. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+1} - 2y_n = 0, \qquad y_0 = 1.$$

3. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+1} + y_n = 0, \qquad y_0 = 2.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.3

4. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+1} - 3y_n = 1, \qquad y_0 = 0.$$

5. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - y_{n+1} = 0, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.5

6. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 2.$$
7. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.7
8. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} + 5y_{n+1} + 6y_n = 2n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$
9. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3^n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 2.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.9
10. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = n\,5^n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$
11. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} - 3a^2y_n = 0, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = a.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.11
12. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 4y_n = 0, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$
13. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 2n + 1, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.13
14. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$
15. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n = 2^n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.15
16. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = n\,3^n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$
17. Risolvere l'equazione alle differenze
$$25y_{n+2} - 10y_{n+1} + y_n = 0, \qquad y_0 = 2, \quad y_1 = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.17
18. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n(-2)^n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$
19. Risolvere l'equazione alle differenze
$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} + 5a^2y_n = a^n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$
Vai alla soluzione dell'esercizio 10.5.19

10.6 Soluzioni degli esercizi

10.6.1 Calcolare la trasformata Z di una successione

Soluzione esercizio 10.3.1 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = 1$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Per definizione,

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

Prima uguaglianza. Definizione di trasformata Z unilatera.
Terza uguaglianza. Serie geometrica di ragione $1/z$.

La serie geometrica converge se e solo se

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \qquad \text{cioe'} \qquad |z| > 1.$$

Quindi

$$F^*(z) = \frac{z}{z-1}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.1

Soluzione esercizio 10.3.3 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Partiamo dalla trasformata della successione costante:

$$\mathcal{Z}\{1\}(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Usiamo la regola di moltiplicazione per n:

$$\mathcal{Z}\{n\}(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$, con $f_n = 1$.

L'insieme di convergenza resta quello della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n}$, cioe'

$$|z| > 1.$$

Quindi

$$F^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.3

Soluzione esercizio 10.3.5 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (-3)^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Per definizione,

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{z}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{z}{z+3}.$$

Prima uguaglianza. Definizione di trasformata Z unilatera.
Terza uguaglianza. Serie geometrica di ragione $-3/z$.

La condizione di convergenza e'

$$\left|-\frac{3}{z}\right| < 1, \qquad \text{cioe'} \qquad |z| > 3.$$

Quindi

$$F^*(z) = \frac{z}{z+3}, \qquad A = \{|z| > 3\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.5

Soluzione esercizio 10.3.7 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^3 + 2n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Per linearita',

$$F^*(z) = \mathcal{Z}\{n^3\}(z) + 2\mathcal{Z}\{n\}(z).$$

Usiamo le formule fondamentali:

$$\mathcal{Z}\{n^3\}(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}, \qquad \mathcal{Z}\{n\}(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Allora

$$F^*(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} + \frac{2z}{(z-1)^2} = \frac{3z(z^2+1)}{(z-1)^4}.$$

Prima uguaglianza. Linearita' della trasformata Z.
Seconda uguaglianza. Riduzione allo stesso denominatore $(z-1)^4$.

Entrambi i termini hanno insieme di convergenza $\{|z| > 1\}$. Quindi

$$F^*(z) = \frac{3z(z^2+1)}{(z-1)^4}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.7

Soluzione esercizio 10.3.9 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (n+2)^2 \cos n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Poniamo

$$c = \cos 1, \qquad Q(z) = z^2 - 2cz + 1. \tag{146}$$

La trasformata di base e'

$$C(z) = \mathcal{Z}\{\cos n\}(z) = \frac{z(z-c)}{Q(z)}.$$

Formula trigonometrica della trasformata Z, con $a = 1$.

Applicando la regola di moltiplicazione per n, si ottiene

$$\mathcal{Z}\{n \cos n\}(z) = -zC'(z) = \frac{z(cz^2 + c - 2z)}{Q(z)^2}. \tag{147}$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione di $C(z) = z(z - c)/Q(z)$, con $Q(z)$ definito in (146).

Applicando ancora la stessa regola,

$$\mathcal{Z}\{n^2 \cos n\}(z) = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{n \cos n\}(z) = \frac{z(z^2 - 1)(2c^2z + cz^2 + c - 4z)}{Q(z)^3}. \tag{148}$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$, con $f_n = n \cos n$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione della formula (147).

Poiche'

$$(n + 2)^2 \cos n = n^2 \cos n + 4n \cos n + 4 \cos n,$$

si ha

$$F^*(z) = \frac{z(z^2 - 1)(2c^2z + cz^2 + c - 4z)}{Q(z)^3} + \frac{4z(cz^2 + c - 2z)}{Q(z)^2} + \frac{4z(z - c)}{Q(z)}.$$

Prima uguaglianza. Linearita' della trasformata Z.
Primo addendo. Formula (148).
Secondo addendo. Formula (147).
Terzo addendo. Formula $C(z) = z(z - c)/Q(z)$.

La moltiplicazione per potenze di n non cambia il raggio di convergenza della serie trigonometrica di base. Quindi

$$A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.9

Soluzione esercizio 10.3.11 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n^2 \cos(3n) + (-2)^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Poniamo

$$c = \cos 3, \qquad Q(z) = z^2 - 2cz + 1.$$

Dalla formula trigonometrica e dalla regola di moltiplicazione per n,

$$\mathcal{Z}\{n^2 \cos(3n)\}(z) = \frac{z(z^2 - 1)(2c^2z + cz^2 + c - 4z)}{Q(z)^3}.$$

Formula ottenuta applicando due volte $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$ alla trasformata di $\cos(3n)$.

Inoltre

$$\mathcal{Z}\{(-2)^n\}(z) = \frac{z}{z + 2}.$$

Formula della successione geometrica, con $a = -2$.

Per linearita',

$$F^*(z) = \frac{z(z^2 - 1)(2c^2z + cz^2 + c - 4z)}{Q(z)^3} + \frac{z}{z + 2}.$$

Primo addendo. Trasformata di $n^2 \cos(3n)$.
Secondo addendo. Trasformata di $(-2)^n$.

Gli insiemi di convergenza sono rispettivamente $\{|z| > 1\}$ e $\{|z| > 2\}$. Quindi

$$A = \{|z| > 2\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.11

Soluzione esercizio 10.3.13 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (n+1)^3$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Sviluppiamo il polinomio:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Per linearita',

$$F^*(z) = \mathcal{Z}\{n^3\} + 3\mathcal{Z}\{n^2\} + 3\mathcal{Z}\{n\} + \mathcal{Z}\{1\}.$$

Usando le formule fondamentali,

$$F^*(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} + 3\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + 3\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}.$$

Prima uguaglianza. Formule per $\mathcal{Z}\{n^3\}$, $\mathcal{Z}\{n^2\}$, $\mathcal{Z}\{n\}$ e $\mathcal{Z}\{1\}$.
Seconda uguaglianza. Riduzione allo stesso denominatore $(z-1)^4$.

Tutti i termini hanno insieme di convergenza $\{|z| > 1\}$. Quindi

$$F^*(z) = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.13

Soluzione esercizio 10.3.15 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n\,4^n$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Partiamo da

$$\mathcal{Z}\{4^n\}(z) = \frac{z}{z-4}.$$

Allora

$$\mathcal{Z}\{n4^n\}(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-4}\right) = \frac{4z}{(z-4)^2}.$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\dfrac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$, con $f_n = 4^n$.

La trasformata di 4^n converge per $|z| > 4$, e la moltiplicazione per n non cambia il raggio di convergenza. Quindi

$$F^*(z) = \frac{4z}{(z-4)^2}, \qquad A = \{|z| > 4\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.15

Soluzione esercizio 10.3.17 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n\cos(2n)$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Poniamo

$$c = \cos 2, \qquad Q(z) = z^2 - 2cz + 1.$$

La trasformata di base e'

$$C(z) = \mathcal{Z}\{\cos(2n)\}(z) = \frac{z(z-c)}{Q(z)}.$$

Quindi

$$F^*(z) = -zC'(z) = \frac{z(cz^2+c-2z)}{Q(z)^2}.$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\dfrac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$, con $f_n = \cos(2n)$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione di $C(z) = z(z-c)/Q(z)$.

La serie trigonometrica di base converge per $|z| > 1$; la moltiplicazione per n non cambia il raggio di convergenza. Quindi

$$F^*(z) = \frac{z((\cos 2)z^2 + \cos 2 - 2z)}{(z^2 - 2z\cos 2 + 1)^2}, \qquad A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.17

Soluzione esercizio 10.3.19 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = n\sin(4n) + e^{-n}$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Poniamo

$$c = \cos 4, \qquad s = \sin 4, \qquad Q(z) = z^2 - 2cz + 1.$$

La trasformata di base e'

$$S(z) = \mathcal{Z}\{\sin(4n)\}(z) = \frac{zs}{Q(z)}.$$

Quindi

$$\mathcal{Z}\{n\sin(4n)\}(z) = -zS'(z) = \frac{zs(z^2-1)}{Q(z)^2}.$$

Prima uguaglianza. Formula $\mathcal{Z}\{nf_n\} = -z\dfrac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\}$, con $f_n = \sin(4n)$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione di $S(z) = zs/Q(z)$.

Inoltre

$$\mathcal{Z}\{e^{-n}\}(z) = \frac{z}{z - e^{-1}}.$$

Formula della successione geometrica, con $a = e^{-1}$.

Per linearita',

$$F^*(z) = \frac{z(\sin 4)(z^2-1)}{(z^2 - 2z\cos 4 + 1)^2} + \frac{z}{z - e^{-1}}.$$

Primo addendo. Trasformata di $n\sin(4n)$.
Secondo addendo. Trasformata di e^{-n}.

Gli insiemi di convergenza sono $\{|z| > 1\}$ e $\{|z| > e^{-1}\}$. La loro intersezione e'

$$A = \{|z| > 1\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.19

Soluzione esercizio 10.3.21 Calcolare la trasformata Z della successione

$$f_n = (n+1)^2 \sin n + \frac{(-3)^n}{n+1}$$

e determinarne l'insieme di convergenza A.

Soluzione. Poniamo

$$c = \cos 1, \qquad s = \sin 1, \qquad Q(z) = z^2 - 2cz + 1. \tag{149}$$

La trasformata di base e'

$$S(z) = \mathcal{Z}\{\sin n\}(z) = \frac{zs}{Q(z)}.$$

Formula trigonometrica della trasformata Z, con $a = 1$.

Poiche' $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, si ha

$$\mathcal{Z}\{(n+1)^2 \sin n\} = \left[\left(-z\frac{d}{dz}\right)^2 + 2\left(-z\frac{d}{dz}\right) + 1\right] S(z).$$

Formula. Operatore $-z\dfrac{d}{dz}$ associato alla moltiplicazione per n.

Eseguendo la derivazione indicata si ottiene

$$\mathcal{Z}\{(n+1)^2 \sin n\} = \frac{2sz^2(2c^2z - 3cz^2 + c + 2z^3 - 2z)}{Q(z)^3}. \tag{150}$$

Formula ottenuta sostituendo $S(z) = zs/Q(z)$, con $Q(z)$ definito in (149).

Calcoliamo ora il secondo termine:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{(-3)^n}{n+1}\right\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(-\frac{3}{z}\right)^n = \frac{z}{3}\log\left(1+\frac{3}{z}\right).$$

Prima uguaglianza. Definizione di trasformata Z unilatera.
Seconda uguaglianza. Sviluppo $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{r^n}{n+1} = -\dfrac{\log(1-r)}{r}$, con $r = -3/z$.
Ramo del logaritmo. Ramo determinato dallo sviluppo di Taylor per $|3/z| < 1$.

Per linearita',

$$F^*(z) = \frac{2(\sin 1)z^2\big(2(\cos 1)^2 z - 3(\cos 1)z^2 + \cos 1 + 2z^3 - 2z\big)}{(z^2 - 2z\cos 1 + 1)^3} + \frac{z}{3}\log\left(1+\frac{3}{z}\right).$$

Primo addendo. Formula (150).
Secondo addendo. Trasformata di $(-3)^n/(n+1)$.

Gli insiemi di convergenza sono $\{|z|>1\}$ e $\{|z|>3\}$. Quindi

$$A = \{|z| > 3\}.$$

Torna all'esercizio 10.3.21

10.6.2 Determinare la successione dalla trasformata Z

Soluzione esercizio 10.4.1 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Soluzione. Confrontiamo la trasformata data con la formula fondamentale:

$$\frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\{1\}(z).$$

Confronto con tabella. Formula $\mathcal{Z}\{1\}(z) = z/(z-1)$, con insieme di convergenza $|z| > 1$.

Quindi

$$f_n = 1, \qquad n \geq 0.$$

Torna all'esercizio 10.4.1

Soluzione esercizio 10.4.3 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Soluzione. Confrontiamo la trasformata data con la formula fondamentale:

$$\frac{z}{(z-1)^2} = \mathcal{Z}\{n\}(z).$$

Confronto con tabella. Formula $\mathcal{Z}\{n\}(z) = z/(z-1)^2$, con insieme di convergenza $|z| > 1$.

Quindi

$$f_n = n, \qquad n \geq 0.$$

Torna all'esercizio 10.4.3

Soluzione esercizio 10.4.5 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che

$$F^*(z) = 1 + \frac{3}{z} - \frac{2}{z^2}.$$

Soluzione. Scriviamo la trasformata nella forma della serie in potenze di z^{-1}:

$$F^*(z) = 1 + 3z^{-1} - 2z^{-2}.$$

Forma normale. La trasformata Z unilatera e' $F^*(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^{-n}$.

Leggendo i coefficienti di z^{-n}, otteniamo

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 3, \qquad f_2 = -2, \qquad f_n = 0 \quad \text{per } n \geq 3.$$

Coefficienti. Termine costante, coefficiente di z^{-1} e coefficiente di z^{-2}.

Torna all'esercizio 10.4.5

Soluzione esercizio 10.4.7 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 3$,

$$F^*(z) = \frac{z(z+1)}{(z-3)^2}.$$

Soluzione. Decomponiamo $F^*(z)$ in forme riconoscibili:

$$\frac{z(z+1)}{(z-3)^2} = \frac{z}{z-3} + \frac{4}{3}\frac{3z}{(z-3)^2}.$$

Decomposizione. Le due forme sono quelle associate a 3^n e $n3^n$.

Infatti

$$\mathcal{Z}\{3^n\}(z) = \frac{z}{z-3}, \qquad \mathcal{Z}\{n3^n\}(z) = \frac{3z}{(z-3)^2}.$$

Per linearita',

$$f_n = 3^n + \frac{4}{3}n3^n = \left(1 + \frac{4n}{3}\right)3^n, \qquad n \geq 0.$$

Prima uguaglianza. Confronto con le due trasformate fondamentali.

Torna all'esercizio 10.4.7

Soluzione esercizio 10.4.9 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 2$,

$$F^*(z) = \left(1 + \frac{2}{z}\right)^{1/2}.$$

Soluzione. Poniamo $w = z^{-1}$. Allora

$$F^*(z) = (1 + 2w)^{1/2}.$$

Usiamo lo sviluppo binomiale:

$$(1+2w)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} 2^n w^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} 2^n z^{-n}.$$

Prima uguaglianza. Sviluppo binomiale centrato in $w = 0$.
Seconda uguaglianza. Sostituzione $w = z^{-1}$.
Ramo della radice. Ramo determinato dalla condizione $(1+2w)^{1/2} = 1$ per $w = 0$.

Quindi

$$f_n = \binom{1/2}{n} 2^n, \qquad n \geq 0.$$

Torna all'esercizio 10.4.9

Soluzione esercizio 10.4.11 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \sinh\left(\frac{3}{z}\right).$$

Soluzione. Sviluppiamo separatamente i due termini:

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}, \qquad \sinh\left(\frac{3}{z}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)}.$$

Primo sviluppo. Serie geometrica di ragione z^{-1}.
Secondo sviluppo. Serie di Taylor di $\sinh w$, con $w = 3/z$.

Leggendo i coefficienti di z^{-n}, otteniamo

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ 1 + \dfrac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad k \geq 0.$$

Prima riga. Per gli indici pari contribuisce solo la serie geometrica.
Seconda riga. Per gli indici dispari contribuiscono entrambi gli sviluppi.

Torna all'esercizio 10.4.11

Soluzione esercizio 10.4.13 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 1$,

$$F^*(z) = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}.$$

Soluzione. Decomponiamo $F^*(z)$ usando le forme associate a $(-1)^n$ e $n(-1)^n$:

$$\frac{z(z+2)}{(z+1)^2} = \frac{z}{z+1} - \left(-\frac{z}{(z+1)^2}\right).$$

Decomposizione. Il secondo termine e' scritto nella forma $\mathcal{Z}\{n(-1)^n\}$.

Infatti

$$\mathcal{Z}\{(-1)^n\}(z) = \frac{z}{z+1}, \qquad \mathcal{Z}\{n(-1)^n\}(z) = -\frac{z}{(z+1)^2}.$$

Per linearita',

$$f_n = (-1)^n - n(-1)^n = (1-n)(-1)^n, \qquad n \geq 0.$$

Prima uguaglianza. Confronto con le due trasformate fondamentali.

Torna all'esercizio 10.4.13

Soluzione esercizio 10.4.15 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che

$$F^*(z) = e^{2/z} + \sin\left(\frac{3}{z}\right).$$

Soluzione. Sviluppiamo i due termini in potenze di z^{-1}:

$$e^{2/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} z^{-n}, \qquad \sin\left(\frac{3}{z}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)}.$$

Primo sviluppo. Serie di Taylor di e^w, con $w = 2/z$.
Secondo sviluppo. Serie di Taylor di $\sin w$, con $w = 3/z$.

Quindi

$$f_{2k} = \frac{2^{2k}}{(2k)!}, \qquad f_{2k+1} = \frac{2^{2k+1} + (-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad k \geq 0.$$

Prima formula. Per gli indici pari contribuisce solo $e^{2/z}$.
Seconda formula. Per gli indici dispari contribuiscono entrambi gli sviluppi.

Torna all'esercizio 10.4.15

Soluzione esercizio 10.4.17 Determinare la successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ sapendo che, per $|z| > 3$,

$$F^*(z) = \log\left(1 + \frac{3}{z}\right).$$

Soluzione. Poniamo $w = 3/z$. Lo sviluppo del logaritmo e'

$$\log(1 + w) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^n}{n}.$$

Sviluppo di Taylor del logaritmo, valido per $|w| < 1$.

Applicando lo sviluppo precedente si ottiene

$$\log\left(1 + \frac{3}{z}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} z^{-n}.$$

Prima uguaglianza. Sostituzione $w = 3/z$.
Ramo del logaritmo. Ramo determinato dallo sviluppo di Taylor per $|3/z| < 1$.

Pertanto

$$f_0 = 0, \qquad f_n = (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n} \quad \text{per } n \geq 1.$$

Torna all'esercizio 10.4.17

10.6.3 Equazioni alle differenze con la trasformata Z

Soluzione esercizio 10.5.1 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+1} - y_n = 0, \qquad y_0 = 3.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$z\big(Y^*(z) - 3\big) - Y^*(z) = 0.$$

Trasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 3$.

Risolvendo rispetto a $Y^*(z)$, otteniamo

$$(z - 1)Y^*(z) = 3z, \qquad Y^*(z) = \frac{3z}{z - 1}.$$

Prima uguaglianza. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.

Invertiamo la trasformata:

$$Y^*(z) = 3\frac{z}{z - 1} \quad \Longrightarrow \quad y_n = 3, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z - 1)$.

Torna all'esercizio 10.5.1

Soluzione esercizio 10.5.3 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+1} + y_n = 0, \qquad y_0 = 2.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$z\big(Y^*(z) - 2\big) + Y^*(z) = 0.$$

Trasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 2$.

Risolvendo rispetto a $Y^*(z)$, otteniamo

$$(z+1)Y^*(z) = 2z, \qquad Y^*(z) = \frac{2z}{z+1}.$$

Prima uguaglianza. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.

Invertiamo:

$$Y^*(z) = 2\frac{z}{z-(-1)} \quad \Longrightarrow \quad y_n = 2(-1)^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{a^n\} = z/(z-a)$, con $a = -1$.

Torna all'esercizio 10.5.3

Soluzione esercizio 10.5.5 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - y_{n+1} = 0, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 1.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$\big(z^2Y^*(z) - z^2 - z\big) - z\big(Y^*(z) - 1\big) = 0.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 1$.

Quindi

$$(z^2 - z)Y^*(z) = z^2, \qquad Y^*(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Prima uguaglianza. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.

Pertanto

$$y_n = 1, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z-1)$.

Torna all'esercizio 10.5.5

Soluzione esercizio 10.5.7 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo i due membri:

$$\big(z^2Y^*(z) - z\big) - 6zY^*(z) + 8Y^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 0$.
Secondo membro. Formula $\mathcal{Z}\{n\} = z/(z-1)^2$.

Risolvendo rispetto a $Y^*(z)$, otteniamo

$$(z^2 - 6z + 8)Y^*(z) - z = \frac{z}{(z-1)^2},$$

$$Y^*(z) = \frac{z(z^2 - 2z + 2)}{(z-1)^2(z-2)(z-4)}.$$

Prima formula. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.
Seconda formula. Risoluzione dell'equazione algebrica.

Decomponiamo in trasformate elementari:

$$Y^*(z) = \frac{4}{9}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-2} + \frac{5}{9}\frac{z}{z-4}.$$

Decomposizione in fratti semplici.

Invertendo termine a termine,

$$y_n = \frac{4}{9} + \frac{n}{3} - 2^n + \frac{5}{9}4^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formule $\mathcal{Z}\{1\} = z/(z-1)$, $\mathcal{Z}\{n\} = z/(z-1)^2$ e $\mathcal{Z}\{a^n\} = z/(z-a)$.

Torna all'esercizio 10.5.7

Soluzione esercizio 10.5.9 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 3^n, \qquad y_0 = 0, \quad y_1 = 2.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$\big(z^2 Y^*(z) - 2z\big) - 5zY^*(z) + 6Y^*(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 0$, $y_1 = 2$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 0$.
Secondo membro. Formula $\mathcal{Z}\{3^n\} = z/(z-3)$.

Allora

$$(z^2 - 5z + 6)Y^*(z) - 2z = \frac{z}{z-3},$$

$$Y^*(z) = \frac{z(2z-5)}{(z-2)(z-3)^2}.$$

Prima formula. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.
Seconda formula. Risoluzione dell'equazione algebrica.

La decomposizione utile e'

$$Y^*(z) = -\frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-3} + \frac{z}{(z-3)^2}.$$

Decomposizione in fratti semplici.

Poiche'

$$\frac{z}{(z-3)^2} = \frac{1}{3}\frac{3z}{(z-3)^2},$$

si ottiene

$$y_n = -2^n + 3^n + \frac{n}{3}3^n, \qquad n \geq 0.$$

Prima formula. Riscrittura nella forma associata a $\mathcal{Z}\{n3^n\} = 3z/(z-3)^2$.
Seconda formula. Antitrasformata Z termine a termine.

Torna all'esercizio 10.5.9

Soluzione esercizio 10.5.11 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} - 3a^2y_n = 0, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = a.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$\big(z^2Y^*(z) - z^2 - az\big) + 2az\big(Y^*(z) - 1\big) - 3a^2Y^*(z) = 0.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 1$, $y_1 = a$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 1$.

Quindi

$$(z^2 + 2az - 3a^2)Y^*(z) = z^2 + 3az.$$

Poiche'

$$z^2 + 2az - 3a^2 = (z - a)(z + 3a), \qquad z^2 + 3az = z(z + 3a),$$

si ha

$$Y^*(z) = \frac{z}{z - a}.$$

Prima formula. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.
Seconda formula. Fattorizzazione del numeratore e del denominatore.
Terza formula. Semplificazione del fattore $z + 3a$.

Pertanto

$$y_n = a^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{a^n\} = z/(z - a)$.

Torna all'esercizio 10.5.11

Soluzione esercizio 10.5.13 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 2n + 1, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Il termine noto ha trasformata

$$\mathcal{Z}\{2n + 1\} = \frac{2z}{(z - 1)^2} + \frac{z}{z - 1}.$$

Linearita' della trasformata Z.

Trasformiamo l'equazione:

$$\big(z^2Y^*(z) - z^2\big) - 7z\big(Y^*(z) - 1\big) + 12Y^*(z) = \frac{2z}{(z - 1)^2} + \frac{z}{z - 1}.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 1$.

Risolvendo rispetto a $Y^*(z)$, otteniamo

$$Y^*(z) = \frac{z(z^3 - 9z^2 + 16z - 6)}{(z - 1)^2(z - 3)(z - 4)}.$$

Formula. Risoluzione dell'equazione algebrica.

Decomponiamo:

$$Y^*(z) = \frac{4}{9}\frac{z}{z - 1} + \frac{1}{3}\frac{z}{(z - 1)^2} + 3\frac{z}{z - 3} - \frac{22}{9}\frac{z}{z - 4}.$$

Decomposizione in fratti semplici.

Invertendo,

$$y_n = \frac{4}{9} + \frac{n}{3} + 3 \cdot 3^n - \frac{22}{9}4^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z termine a termine.

Torna all'esercizio 10.5.13

Soluzione esercizio 10.5.15 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n = 2^n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo:

$$\big(z^2Y^*(z) - z^2\big) - 8z\big(Y^*(z) - 1\big) + 16Y^*(z) = \frac{z}{z-2}.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 1$.
Secondo membro. Formula $\mathcal{Z}\{2^n\} = z/(z-2)$.

Si ricava

$$Y^*(z) = \frac{z(z^2 - 10z + 17)}{(z-2)(z-4)^2}.$$

Formula. Risoluzione dell'equazione algebrica.

La decomposizione e'

$$Y^*(z) = \frac{1}{4}\frac{z}{z-2} + \frac{3}{4}\frac{z}{z-4} - \frac{7}{8}\frac{4z}{(z-4)^2}.$$

Decomposizione in fratti semplici nella forma delle trasformate elementari.

Quindi

$$y_n = \frac{1}{4}2^n + \frac{3}{4}4^n - \frac{7}{8}n4^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{n4^n\} = 4z/(z-4)^2$.

Torna all'esercizio 10.5.15

Soluzione esercizio 10.5.17 Risolvere l'equazione alle differenze

$$25y_{n+2} - 10y_{n+1} + y_n = 0, \qquad y_0 = 2, \quad y_1 = 0.$$

Soluzione. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$25\big(z^2Y^*(z) - 2z^2\big) - 10z\big(Y^*(z) - 2\big) + Y^*(z) = 0.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2Y^*(z) - z^2y_0 - zy_1$, con $y_0 = 2$, $y_1 = 0$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 2$.

Quindi

$$(25z^2 - 10z + 1)Y^*(z) = 50z^2 - 20z.$$

Poiche'

$$25z^2 - 10z + 1 = 25\left(z - \frac{1}{5}\right)^2,$$

si ottiene

$$Y^*(z) = 2\frac{z}{z - \frac{1}{5}} - 2\frac{\frac{1}{5}z}{(z - \frac{1}{5})^2}.$$

Prima formula. Raccolta dei termini contenenti $Y^*(z)$.
Seconda formula. Fattorizzazione del denominatore.
Terza formula. Decomposizione nella forma delle trasformate elementari.

Invertendo,

$$y_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n - 2n\left(\frac{1}{5}\right)^n = 2(1-n)5^{-n}, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{na^n\} = az/(z-a)^2$, con $a = 1/5$.

Torna all'esercizio 10.5.17

Soluzione esercizio 10.5.19 Risolvere l'equazione alle differenze

$$y_{n+2} + 2ay_{n+1} + 5a^2 y_n = a^n, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0.$$

Soluzione. Consideriamo il caso non degenere $a \neq 0$. Poniamo

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}(z).$$

Trasformiamo l'equazione:

$$\big(z^2 Y^*(z) - z^2\big) + 2az\big(Y^*(z) - 1\big) + 5a^2 Y^*(z) = \frac{z}{z-a}.$$

Primo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+2}\} = z^2 Y^*(z) - z^2 y_0 - z y_1$, con $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.
Secondo termine. Formula $\mathcal{Z}\{y_{n+1}\} = z(Y^*(z) - y_0)$, con $y_0 = 1$.
Secondo membro. Formula $\mathcal{Z}\{a^n\} = z/(z-a)$.

Quindi

$$Y^*(z) = \frac{\frac{z}{z-a} + z^2 + 2az}{z^2 + 2az + 5a^2}.$$

Formula. Risoluzione dell'equazione algebrica.

Poniamo

$$r_+ = a(-1+2i), \qquad r_- = a(-1-2i).$$

Allora

$$z^2 + 2az + 5a^2 = (z - r_+)(z - r_-).$$

Fattorizzazione del polinomio caratteristico.

La decomposizione in fratti semplici e'

$$Y^*(z) = \frac{1}{8a^2}\frac{z}{z-a} + B\frac{z}{z-r_+} + \overline{B}\frac{z}{z-r_-},$$

dove

$$B = \frac{8a^2 - 1 + i(1-4a^2)}{16a^2}.$$

Decomposizione. Poiche' $a \in \mathbb{R}$, i due coefficienti associati a r_+ e r_- sono coniugati.

Invertendo termine a termine,

$$y_n = \frac{1}{8a^2}a^n + B\big(a(-1+2i)\big)^n + \overline{B}\big(a(-1-2i)\big)^n, \qquad n \geq 0.$$

Antitrasformata Z. Formula $\mathcal{Z}\{r^n\} = z/(z-r)$.

Se si adotta la convenzione $0^0 = 1$, nel caso $a = 0$ si ottiene invece

$$Y^*(z) = 1 + z^{-2}, \qquad y_0 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_n = 0 \text{ per } n \geq 3.$$

Caso degenere. Equazione trasformata $z^2 Y^*(z) - z^2 = 1$.

Torna all'esercizio 10.5.19

11 Distribuzioni

11.1 Introduzione

Le distribuzioni permettono di derivare funzioni con salti, funzioni definite a tratti e oggetti concentrati in un punto come la delta di Dirac. In questa sezione useremo una forma operativa della teoria, sufficiente per gli esercizi tipici di Metodi Matematici.

I casi ricorrenti sono:

1. derivate distribuzionali di H, sgn, $|x|$;
2. prodotti di funzioni regolari con δ_a e δ'_a;
3. derivate di prodotti con salti;
4. composizione $\delta(g(x))$ quando gli zeri di g sono semplici.

11.2 Regole operative

Metodo.

1. **Delta e Heaviside.**
$$DH = \delta_0, \qquad D\ \mathrm{sgn}(x) = 2\delta_0.$$
2. **Valore assoluto.**
$$D|x| = \mathrm{sgn}(x), \qquad D^2|x| = 2\delta_0.$$
3. **Prodotto con delta.** Se φ e' regolare, allora
$$\varphi(x)\delta_a = \varphi(a)\delta_a.$$
4. **Prodotto con delta derivata.** Se φ e' regolare, allora
$$\varphi(x)\delta'_a = \varphi(a)\delta'_a - \varphi'(a)\delta_a.$$
5. **Derivata di una funzione con salto.** Se f e' regolare a tratti e ha un salto in x_0, nella derivata distribuzionale compare
$$\big(f(x_0^+) - f(x_0^-)\big)\delta_{x_0}.$$
6. **Delta composta.** Se $g \in C^1$ ha zeri semplici x_j, allora
$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{\delta_{x_j}}{|g'(x_j)|}.$$

Esercizi.

1. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$D|x|.$$
2. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$D^2|x-3|.$$
3. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$D\ \mathrm{sgn}(x-2).$$
4. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$D\left(e^x H(x)\right).$$
5. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$D\left(e^{-x}\,\mathrm{sgn}(x)\right).$$
6. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$x^2\delta'_0.$$
7. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$e^x\delta'_0.$$
8. Semplificare nel senso delle distribuzioni
$$(x^2+1)\delta'_2.$$

9. Semplificare nel senso delle distribuzioni

$$D\left(\operatorname{sgn}(x-2)\operatorname{sgn}(x+1)\right).$$

10. Semplificare nel senso delle distribuzioni

$$D\left((x+1)H(x-3)\right).$$

11. Scrivere esplicitamente

$$\delta(x^2-4).$$

12. Scrivere esplicitamente

$$\delta(\sin x)$$

nell'intervallo $(-\pi, \pi)$.

11.3 Derivate distribuzionali di funzioni a tratti

Metodo.

1. Si calcola la derivata ordinaria su ogni intervallo di regolarita'.
2. Si individuano i punti di salto.
3. Per ogni salto in x_j, si aggiunge

$$\big(f(x_j^+)-f(x_j^-)\big)\delta_{x_j}.$$

Esercizi.

1. Calcolare la derivata distribuzionale di

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0<x<1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2. Calcolare la derivata distribuzionale di

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1-x, & x>0.\end{cases}$$

3. Calcolare Df, dove

$$f(x)=(x^2-1)H(x-1).$$

4. Calcolare $D^2 f$, dove

$$f(x)=|x-1|.$$

12 Teoria e dimostrazioni

12.1 Introduzione

Questa sezione raccoglie gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi usati nelle sezioni precedenti. Per ora la struttura e' organizzata come indice operativo delle dimostrazioni da sviluppare: ogni sottosezione corrisponde a un nucleo teorico ricorrente negli esercizi.

12.2 Disuguaglianza triangolare

Idea della dimostrazione e contesto. La disuguaglianza triangolare e' una delle disuguaglianze fondamentali dell'analisi. Nel piano complesso afferma che il modulo della somma di due numeri complessi non puo' superare la somma dei moduli:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Geometricamente, se z e w sono due vettori del piano, allora $z+w$ e' il vettore risultante ottenuto mettendoli in successione. La disuguaglianza dice che il percorso diretto non e' piu' lungo del percorso spezzato.

Il nome viene proprio dalla geometria dei triangoli: in un triangolo, la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due. L'idea geometrica e' gia' presente nella geometria euclidea classica, mentre la formulazione moderna in termini di moduli, norme e spazi vettoriali appartiene allo sviluppo dell'analisi moderna.

In analisi complessa questa disuguaglianza verra' usata continuamente: nelle stime degli integrali, nella convergenza di serie, nella stima ML, nelle serie di potenze e nei passaggi al limite.

Struttura della dimostrazione.

1. Partire dal quadrato del modulo:
$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)}.$$

2. Espandere il prodotto e raccogliere i termini misti tramite la parte reale:
$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

3. Usare la stima
$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||w|.$$

4. Ottenere
$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$
e passare alla radice quadrata.

Prerequisiti. Servono le proprieta' elementari del modulo complesso:

$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad |zw| = |z||w|, \qquad |\overline{z}| = |z|.$$

Serve inoltre il fatto che, per ogni numero complesso α,

$$\mathrm{Re}(\alpha) \leq |\alpha|.$$

Infatti, se $\alpha = a + ib$, allora

$$\mathrm{Re}(\alpha) = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $z, w \in \mathbb{C}$.

Tesi. Allora

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Dimostrazione. Consideriamo il quadrato del modulo:
$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}.$$
Poiche'
$$\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w},$$
si ha
$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}.$$
Prima uguaglianza. Definizione del quadrato del modulo.
Seconda uguaglianza. Il coniugato della somma e' la somma dei coniugati.
Terza uguaglianza. Espansione del prodotto.

Ora
$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad w\overline{w} = |w|^2.$$
Inoltre i due termini misti sono coniugati:
$$w\overline{z} = \overline{z\overline{w}}.$$
Quindi
$$z\overline{w} + w\overline{z} = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$
Passaggio. Per ogni complesso α, si ha $\alpha + \overline{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha)$.

Dunque
$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$
Poiche'
$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| = |z|\,|\overline{w}| = |z|\,|w|,$$
otteniamo
$$|z+w|^2 \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2.$$
Prima disuguaglianza. Stima $\mathrm{Re}(\alpha) \le |\alpha|$, applicata ad $\alpha = z\overline{w}$.
Seconda uguaglianza. Prodotto notevole.

Poiche' entrambi i membri sono non negativi, possiamo prendere la radice quadrata:
$$|z+w| \le |z| + |w|.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $z, w \in \mathbb{C}$ permette di usare coniugio, modulo e parte reale. La dimostrazione e' specifica per il piano complesso, ma il risultato ha una forma piu' generale: vale in qualunque spazio vettoriale normato.

La struttura algebrica dei complessi serve nel passaggio
$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}.$$
Senza una nozione di modulo compatibile con prodotto e coniugio, questa dimostrazione non avrebbe senso. In contesti piu' generali la disuguaglianza triangolare viene spesso presa direttamente come una delle proprieta' che definiscono una norma.

Osservazione. Per induzione si ottiene subito la forma finita:
$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$
Infatti, applicando il caso a due termini a
$$(z_1 + \cdots + z_{n-1}) + z_n,$$
si ottiene
$$|z_1 + \cdots + z_n| \le |z_1 + \cdots + z_{n-1}| + |z_n|,$$
e poi si conclude per induzione.

Nel caso di due termini, l'uguaglianza si ha quando z e w puntano nella stessa direzione, cioe' quando uno e' un multiplo reale non negativo dell'altro. Geometricamente, il percorso spezzato non spreca lunghezza solo se i due segmenti sono allineati e orientati nello stesso verso.

12.3 Serie geometrica

Idea della dimostrazione e contesto. La serie geometrica e' uno degli strumenti elementari piu' usati in analisi complessa. La sua forma fondamentale e'

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

In analisi complessa questa formula compare continuamente: nello sviluppo del nucleo di Cauchy, nelle serie di potenze, nello studio della convergenza e nelle espansioni di Laurent.

L'idea e' semplice: prima si calcola la somma finita

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^N,$$

poi si manda $N \to +\infty$. Se $|q| < 1$, il termine q^{N+1} tende a zero e rimane solo il fattore $(1-q)^{-1}$.

Le progressioni geometriche compaiono gia' nella matematica antica, per esempio in problemi di calcolo di somme e proporzioni. La formulazione moderna tramite limiti e serie infinite appartiene invece allo sviluppo dell'analisi.

Struttura della dimostrazione.

1. Definire la somma parziale
$$S_N = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N.$$
2. Moltiplicare per q:
$$qS_N = q + q^2 + \cdots + q^{N+1}.$$
3. Sottrarre le due identita':
$$S_N - qS_N = 1 - q^{N+1}.$$
4. Se $q \neq 1$, ricavare
$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}.$$
5. Se $|q| < 1$, mandare $N \to +\infty$ e usare $q^{N+1} \to 0$.

Prerequisiti. Servono la definizione di somma parziale di una serie e il criterio elementare per le potenze:

$$|q| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad q^n \to 0.$$

Infatti
$$|q^n| = |q|^n,$$
e, poiche' $0 \le |q| < 1$, la successione reale $|q|^n$ tende a zero.

Enunciato. Si assuma che:

1. $q \in \mathbb{C}$.
2. $|q| < 1$.

Tesi. Allora la serie geometrica converge e vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Dimostrazione. Per ogni intero $N \geq 0$, consideriamo la somma parziale

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N.$$

Moltiplichiamo per q:

$$qS_N = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{N+1}.$$

Sottraendo, otteniamo

$$S_N - qS_N = (1 + q + q^2 + \cdots + q^N) - (q + q^2 + \cdots + q^N + q^{N+1}) = 1 - q^{N+1}.$$

Passaggio. Tutti i termini intermedi $q, q^2, \ldots, q^N$ si semplificano.

Quindi

$$(1 - q)S_N = 1 - q^{N+1}.$$

Poiche' $|q| < 1$, in particolare $q \neq 1$, e dunque $1 - q \neq 0$. Possiamo dividere per $1 - q$:

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Formula. Questa e' la formula della somma geometrica finita.

Ora mandiamo $N \to +\infty$. Poiche'

$$|q^{N+1}| = |q|^{N+1} \to 0,$$

si ha

$$q^{N+1} \to 0.$$

Pertanto

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Per definizione di somma di una serie, questo significa che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $q \in \mathbb{C}$ stabilisce il contesto in cui lavoriamo: le potenze q^n, il modulo $|q|$ e il limite sono quelli del piano complesso.

L'ipotesi $|q| < 1$ e' decisiva per il passaggio al limite. Infatti serve a garantire

$$q^{N+1} \to 0.$$

Senza questa ipotesi la serie non converge. Per esempio, se $q = 1$, allora

$$\sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1 \to +\infty.$$

Se $q = -1$, le somme parziali oscillano:

$$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \ldots$$

e quindi non convergono.

La condizione $q \neq 1$ sarebbe sufficiente per la formula finita

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

ma non basta per la serie infinita. Per la serie infinita serve precisamente che il resto q^{N+1} tenda a zero.

Osservazione. Una forma equivalente, molto usata in analisi complessa, si ottiene ponendo

$$q = \frac{w - z_0}{z - z_0}.$$

Se

$$\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| < 1,$$

allora

$$\frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n.$$

Questa e' la forma che compare nello sviluppo del nucleo di Cauchy:

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n.$$

12.4 Lemma di Abel per le serie di potenze

Idea della dimostrazione e contesto. Il lemma di Abel per le serie di potenze e' il primo risultato strutturale che spiega perche' le serie di potenze hanno un dominio di convergenza ordinato attorno al centro. Se una serie di potenze converge in un punto z_1 diverso dal centro z_0, allora converge assolutamente in tutti i punti piu' vicini al centro di quanto lo sia z_1.

L'idea e' semplice. La convergenza in z_1 implica che il termine generale

$$a_n(z_1 - z_0)^n$$

tende a zero, quindi e' limitato. Se z e' piu' vicino a z_0 rispetto a z_1, allora il termine

$$a_n(z - z_0)^n$$

si ottiene moltiplicando $a_n(z_1 - z_0)^n$ per una potenza di un numero di modulo minore di 1. Questo permette di confrontare la serie dei moduli con una serie geometrica convergente.

Il lemma e' legato al nome di Niels Henrik Abel (1802–1829), il cui lavoro sulle serie contribui' allo sviluppo rigoroso dell'analisi nell'Ottocento. In questa sezione il nome di Abel indica il risultato elementare di confronto per serie di potenze, non la trasformazione di Abel e non il teorema di Abel sui limiti radiali al bordo.

Struttura della dimostrazione.

1. Usare la convergenza della serie in z_1 per ottenere
$$a_n(z_1 - z_0)^n \to 0.$$
2. Dedurre che la successione dei termini
$$\big(a_n(z_1 - z_0)^n\big)_{n \geq 0}$$
e' limitata.
3. Per un punto z con
$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|,$$
introdurre
$$q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|, \qquad 0 \leq q < 1.$$
4. Stimare il termine generale con
$$|a_n(z - z_0)^n| \leq M q^n.$$
5. Concludere per confronto con la serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{+\infty} M q^n.$$

Prerequisiti. Serve il fatto che, se una serie converge, allora il suo termine generale tende a zero. Serve inoltre il fatto elementare che ogni successione convergente e' limitata.

Useremo anche il criterio del confronto per serie a termini non negativi: se

$$0 \leq u_n \leq v_n \qquad \text{per ogni } n$$

e la serie $\sum v_n$ converge, allora converge anche la serie $\sum u_n$.

Infine useremo la serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{converge per } 0 \leq q < 1.$$

Quindi, per $M > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M q^n$$

converge per $0 \leq q < 1$.

Enunciato. Si assuma che:

1. $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $(a_n)_{n \geq 0}$ e' una successione di numeri complessi.
3. $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$
   e' una serie di potenze centrata in z_0.
4. La serie converge in un punto $z_1 \neq z_0$, cioe' converge la serie numerica
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_1 - z_0)^n.$$

Tesi. Allora la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Cioe', per ogni tale z, converge la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n (z - z_0)^n| .$$

Dimostrazione. Poiche' la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ converge, il suo termine generale $a_n (z_1 - z_0)^n$ tende a zero. Quindi la successione $\big(a_n (z_1 - z_0)^n\big)_{n \geq 0}$ e' convergente, e in particolare e' limitata. Dunque esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M \qquad \text{per ogni } n. \tag{151}$$

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Poiche' $z_1 \neq z_0$, possiamo dividere per $z_1 - z_0$. Poniamo

$$q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| .$$

Allora

$$0 \leq q < 1.$$

Per ogni $n \geq 0$, riscriviamo il termine della serie nel punto z usando il punto z_1:

$$a_n(z - z_0)^n = a_n(z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n.$$

Uguaglianza. Abbiamo moltiplicato e diviso per $(z_1 - z_0)^n$, possibile perche' $z_1 \neq z_0$.

Passando ai moduli,

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq Mq^n.$$

Prima uguaglianza. Modulo del prodotto.
Disuguaglianza. Usiamo la stima (151) ottenuta dalla convergenza della serie in z_1, e la definizione di q.

Poiche' $0 \leq q < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Mq^n$$

converge. Per confronto, converge anche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z - z_0)^n|.$$

Quindi la serie di potenze converge assolutamente in z.

Poiche' z era un qualunque punto tale che

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|,$$

la serie converge assolutamente in tutto il disco aperto centrato in z_0 e di raggio $|z_1 - z_0|$.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che la serie converga in z_1 e' il punto di partenza della dimostrazione: da essa ricaviamo che

$$a_n(z_1 - z_0)^n \to 0$$

e quindi che i termini $a_n(z_1 - z_0)^n$ sono limitati. Senza questa limitatezza non avremmo il confronto con Mq^n.

La condizione $z_1 \neq z_0$ serve per poter dividere per $z_1 - z_0$. Inoltre la convergenza nel centro z_0 non contiene informazione sui coefficienti: infatti in $z = z_0$ la serie vale sempre a_0, indipendentemente dal comportamento degli altri termini.

La disuguaglianza stretta

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

serve per ottenere

$$q < 1.$$

Questo e' il punto che rende convergente la serie geometrica di confronto. Se invece $q = 1$, il confronto con $\sum Mq^n$ non permette di concludere, perche' $\sum M$ diverge. Il lemma quindi garantisce la convergenza all'interno del disco, non automaticamente sul bordo.

Osservazione. Questo lemma e' il primo passo verso l'esistenza del raggio di convergenza. Se una serie di potenze converge in un punto $z_1 \neq z_0$, allora converge assolutamente in tutto il disco aperto centrato in z_0 e di raggio

$$|z_1 - z_0|.$$

Quindi l'insieme dei punti di convergenza non e' arbitrario: attorno al centro si forma sempre un disco di convergenza. Il passo successivo sara' formalizzare questa idea introducendo il raggio di convergenza.

12.5 Raggio di convergenza di una serie di potenze

Idea della dimostrazione e contesto. Una serie di potenze non converge in un insieme di punti disposto in modo casuale. Il lemma di Abel per le serie di potenze mostra che, se la serie converge in un punto z_1, allora converge assolutamente in tutti i punti piu' vicini al centro z_0. Quindi i punti di convergenza si organizzano attorno al centro in forma di disco.

Il teorema sul raggio di convergenza formalizza questa idea: esiste un numero R, eventualmente nullo oppure infinito, tale che la serie converge assolutamente dentro il disco

$$|z - z_0| < R$$

e diverge fuori dal disco

$$|z - z_0| > R.$$

Sul bordo, invece, il comportamento puo' cambiare da punto a punto.

Lo studio sistematico delle serie di potenze diventa centrale nello sviluppo dell'analisi tra Settecento e Ottocento. L'idea moderna non e' soltanto calcolare una serie, ma capire dove essa rappresenta una funzione e quali operazioni sono lecite nel suo dominio di convergenza.

Struttura della dimostrazione.

1. Considerare l'insieme delle distanze dal centro in cui la serie converge:

$$A = \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

2. Definire

$$R = \sup A.$$

3. Se $|z - z_0| < R$, scegliere un punto di convergenza z_1 piu' lontano dal centro di z, cioe' con

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

4. Applicare il lemma di Abel per ottenere la convergenza assoluta in z.

5. Se $|z - z_0| > R$, osservare che la convergenza in z porterebbe a una distanza appartenente ad A e maggiore di $\sup A$, impossibile.

Prerequisiti. Serve il lemma di Abel per le serie di potenze, dimostrato nella Sezione 12.4: se una serie di potenze converge in un punto $z_1 \neq z_0$, allora converge assolutamente per ogni z tale che

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Serve inoltre la nozione di estremo superiore. Se $A \subseteq [0, +\infty)$ e $R = \sup A$, allora:

1. nessun elemento di A puo' essere maggiore di R;

2. se $r < R$, allora esiste $\rho \in A$ tale che

$$r < \rho \leq R.$$

Se A non e' limitato superiormente, scriviamo

$$\sup A = +\infty.$$

In questo caso, per ogni $r \geq 0$ esiste $\rho \in A$ tale che

$$\rho > r,$$

perche' dire che A non e' limitato superiormente significa proprio che nessun numero reale puo' essere un maggiorante di A.

Enunciato. Si assuma che:

1. $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $(a_n)_{n \geq 0}$ e' una successione di numeri complessi.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ e' una serie di potenze centrata in z_0.

Tesi. Allora esiste un numero $R \in [0, +\infty]$ tale che:

1. se $|z - z_0| < R$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge assolutamente;
2. se $|z - z_0| > R$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge.

Il numero R si chiama raggio di convergenza della serie di potenze.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ converge} \right\}.$$

L'insieme A e' non vuoto, perche' $0 \in A$. Infatti, per $z = z_0$, la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0 - z_0)^n = a_0,$$

dove tutti i termini con $n \geq 1$ sono nulli.

Definiamo

$$R = \sup A,$$

con la convenzione che $R = +\infty$ se A non e' limitato superiormente.

Dimostriamo prima la convergenza assoluta all'interno del disco. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che

$$|z - z_0| < R.$$

Poniamo

$$r = |z - z_0|.$$

Se $r = 0$, allora $z = z_0$ e la serie converge. Supponiamo quindi $r > 0$.

Poiche' $r < R = \sup A$, oppure $R = +\infty$ e A non e' limitato superiormente, esiste $\rho \in A$ tale che

$$r < \rho.$$

Per definizione di A, esiste un punto $z_1 \in \mathbb{C}$ tale che

$$\rho = |z_1 - z_0|$$

e la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$$

converge. Inoltre $\rho > r > 0$, quindi $z_1 \neq z_0$. Dal lemma di Abel per le serie di potenze, poiche'

$$|z - z_0| = r < \rho = |z_1 - z_0|,$$

segue che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge assolutamente.

Dimostriamo ora la divergenza all'esterno del disco. Supponiamo che

$$|z - z_0| > R.$$

Se la serie convergesse in z, allora, per definizione di A, avremmo

$$|z - z_0| \in A.$$

Ma questo e' impossibile, perche' $R = \sup A$ e nessun elemento di A puo' essere maggiore di R. Quindi la serie diverge in ogni punto tale che

$$|z - z_0| > R.$$

Abbiamo dunque costruito un numero $R \in [0, +\infty]$ con le proprieta' richieste.

Ruolo delle ipotesi. Il fatto che la serie sia una serie di potenze centrata in z_0 e' essenziale. La dimostrazione usa in modo decisivo la dipendenza dei termini da $(z - z_0)^n$: solo cosi' il lemma di Abel permette di trasferire la convergenza da un punto a tutti i punti piu' vicini al centro.

La presenza del centro z_0 serve a misurare la convergenza tramite la distanza $|z - z_0|$. Il teorema non dice che i punti di convergenza siano ordinati rispetto alla distanza dall'origine, ma rispetto alla distanza dal centro della serie.

La possibilita' $R = 0$ non va esclusa. Per esempio, possono esistere serie di potenze che convergono solo nel centro. La possibilita' $R = +\infty$ non va esclusa: per esempio la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Osservazione. Il teorema non afferma nulla, in generale, sui punti del bordo

$$|z - z_0| = R.$$

Sul bordo possono accadere comportamenti diversi. Per esempio, nel caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

il raggio di convergenza e' $R = 1$, ma sul bordo $|z| = 1$ la serie diverge in ogni punto, perche' il termine generale z^n ha modulo 1 e quindi non puo' tendere a zero.

Nel caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n},$$

il raggio di convergenza e' ancora $R = 1$, ma sul bordo il comportamento non e' unico: in $z = 1$ si ottiene la serie armonica, che diverge, mentre in $z = -1$ si ottiene la serie armonica alternata, che converge.

Nel caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

il raggio di convergenza e' $R = 1$ e la serie converge assolutamente in ogni punto del bordo, perche' se $|z| = 1$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Il risultato importante da trattenere e' questo: prima di studiare il bordo, la serie di potenze ha sempre una regione interna di convergenza assoluta perfettamente descritta da un disco centrato in z_0. Questo disco e' determinato dal raggio di convergenza R.

12.6 Convergenza uniforme sui compatti interni al disco di convergenza

Idea della dimostrazione e contesto. Il raggio di convergenza descrive dove una serie di potenze converge punto per punto. Per sviluppare la teoria delle funzioni analitiche serve pero' un risultato piu' forte: dentro il disco di convergenza, lontano dal bordo, la convergenza e' uniforme.

La differenza con il teorema precedente e' questa. Il teorema sul raggio di convergenza dice che, fissato un singolo punto z con $|z - z_0| < R$, la serie converge assolutamente in quel punto. Il risultato di questa sezione dice invece che, fissato un intero disco chiuso $|z-z_0| \leq r$ con $r < R$, la stessa stima funziona simultaneamente per tutti i punti del disco. Quindi non stiamo solo aggiungendo un dettaglio tecnico: stiamo passando da convergenza punto per punto a convergenza uniforme.

Questo fatto e' fondamentale perche' la convergenza uniforme permette di trattare la serie come un oggetto stabile rispetto a operazioni di limite. In particolare, prepara i risultati successivi: integrazione termine a termine e derivazione termine a termine.

L'idea e' confrontare i termini della serie con una serie geometrica che non dipende dal punto z. Se vogliamo studiare la serie nel disco chiuso $|z - z_0| \leq r$, scegliamo un raggio piu' grande ρ, ancora interno al disco di convergenza. La convergenza a distanza ρ dal centro fornisce un controllo sui coefficienti; il rapporto $r/\rho < 1$ produce poi una geometrica convergente.

Il criterio di convergenza uniforme usato nella dimostrazione e' spesso chiamato criterio di Weierstrass, dal nome di Karl Weierstrass (1815–1897), figura centrale nella formalizzazione rigorosa dell'analisi nell'Ottocento.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un raggio r interno al disco di convergenza, cioe' $0 < r < R$.
2. Scegliere ρ tale che
$$r < \rho < R.$$
3. Usare la convergenza assoluta a distanza ρ dal centro per ottenere una stima sui coefficienti:
$$|a_n|\rho^n \leq M.$$
4. Per $|z - z_0| \leq r$, stimare
$$|a_n(z - z_0)^n| \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$
5. Concludere con il criterio di Weierstrass, perche'
$$\sum_{n=0}^{+\infty} M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$
e' una serie geometrica convergente.

Prerequisiti. Serve il teorema sul raggio di convergenza, dimostrato nella Sezione 12.5: se R e' il raggio di convergenza della serie $\sum a_n(z - z_0)^n$, allora la serie converge assolutamente per ogni z tale che $|z - z_0| < R$.

Serve inoltre il criterio di Weierstrass. Se E e' un insieme, se (f_n) e' una successione di funzioni su E, e se esiste una serie numerica convergente $\sum M_n$ tale che
$$|f_n(z)| \leq M_n \qquad \text{per ogni } z \in E$$
e per ogni n, allora la serie di funzioni $\sum f_n(z)$ converge uniformemente su E.

Enunciato. Si assuma che:

1. $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$ e' una successione di numeri complessi.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ e' una serie di potenze con raggio di convergenza $R \in [0, +\infty]$.
4. r e' un numero reale tale che $0 \leq r < R$.

Tesi. Allora:

1. la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente e uniformemente nel disco chiuso

$$\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq r\};$$

Dimostrazione. Il caso $r = 0$ e' immediato, perche' il disco chiuso $\overline{B(z_0, 0)}$ contiene solo il punto z_0. Supponiamo quindi $0 < r < R$.

Scegliamo ρ con

$$r < \rho < R.$$

Se $R = +\infty$, basta scegliere un qualunque $\rho > r$.

Consideriamo, per esempio, il punto

$$z_1 = z_0 + \rho.$$

Allora $|z_1 - z_0| = \rho < R$. Per il teorema sul raggio di convergenza, la serie di potenze converge assolutamente in z_1, cioe' converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(z_1 - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\rho^n.$$

In particolare il termine generale $|a_n|\rho^n$ tende a zero, quindi e' limitato. Esiste dunque $M > 0$ tale che

$$|a_n|\rho^n \leq M \qquad \text{per ogni } n. \tag{1}$$

Sia ora $z \in \overline{B(z_0, r)}$, cioe' $|z - z_0| \leq r$. Allora

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq |a_n|r^n = |a_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Prima uguaglianza. Modulo del prodotto.
Prima disuguaglianza. Usiamo $|z - z_0| \leq r$.
Seconda uguaglianza. Moltiplichiamo e dividiamo per ρ^n.
Seconda disuguaglianza. Usiamo la stima (1).

Poiche' $0 < r/\rho < 1$, la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

converge. Inoltre la stima precedente vale per ogni $z \in \overline{B(z_0, r)}$. Per il criterio di Weierstrass, la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

converge uniformemente su $\overline{B(z_0, r)}$.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $0 \le r < R$ dice che il disco chiuso su cui vogliamo la convergenza uniforme e' strettamente interno al disco di convergenza. Questo margine e' essenziale nella dimostrazione, perche' permette di scegliere ρ con

$$r < \rho < R$$

quando $r > 0$, e quindi di ottenere il rapporto geometrico $r/\rho < 1$.

Il fatto che R sia il raggio di convergenza serve per sapere che la serie converge assolutamente a distanza ρ dal centro. Da questa convergenza ricaviamo la limitatezza dei termini $|a_n|\rho^n$, che e' il controllo sui coefficienti usato nella stima uniforme.

La conclusione non riguarda automaticamente il bordo $|z-z_0| = R$. Se si prende $r = R$, quando $R < +\infty$, non esiste piu' necessariamente un ρ intermedio con $r < \rho < R$. Questo non significa che la convergenza uniforme sul bordo sia sempre falsa: significa che non e' garantita dal solo dato del raggio di convergenza.

Per esempio, la serie $\sum z^n$ ha raggio $R = 1$ e non converge sul bordo in $z = 1$. Invece la serie $\sum z^n/n^2$ ha ancora raggio $R = 1$, ma converge uniformemente su $|z| \le 1$, perche'

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \qquad \text{per } |z| \le 1.$$

Osservazione. Il risultato vale non solo per dischi chiusi centrati in z_0, ma per ogni compatto contenuto nel disco aperto di convergenza. Sia infatti $K \subset B(z_0, R)$ compatto. La funzione $z \mapsto |z - z_0|$ e' continua, quindi assume massimo su K. Poniamo

$$m = \max_{z\in K} |z - z_0|.$$

Poiche' $K \subset B(z_0, R)$, si ha $m < R$. Se $R < +\infty$, scegliamo r tale che

$$m \le r < R.$$

Se invece $R = +\infty$, scegliamo un qualunque $r \ge m$. In entrambi i casi si ha

$$K \subset \overline{B(z_0, r)}.$$

Quindi la convergenza uniforme su $\overline{B(z_0, r)}$ implica la convergenza uniforme su K.

Questo e' il ponte verso la derivazione termine a termine: dentro il disco di convergenza, le serie di potenze non si comportano solo come somme puntuali, ma come limiti uniformi su ogni regione chiusa che resti a distanza positiva dal bordo.

12.7 Derivazione termine a termine di una serie di potenze

Idea della dimostrazione e contesto. Il risultato precedente dice che una serie di potenze converge uniformemente sui dischi chiusi contenuti nel disco di convergenza. Il passo successivo e' mostrare che, dentro lo stesso disco, si puo' derivare la serie termine a termine.

Questo e' uno dei motivi per cui le serie di potenze sono molto piu' regolari delle serie di funzioni generiche: non solo definiscono una funzione, ma la funzione ottenuta e' derivabile e la derivata si calcola derivando i singoli monomi.

La differenza con il teorema precedente e' la seguente. La convergenza uniforme sui compatti interni controlla la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Ora dobbiamo controllare anche la serie ottenuta derivando formalmente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Il fattore n potrebbe sembrare pericoloso, ma viene assorbito da una serie geometrica derivata, del tipo $\sum nq^{n-1}$, con $0 < q < 1$.

La possibilita' di derivare serie di potenze termine a termine entra nella formalizzazione moderna dell'analisi nell'Ottocento. In particolare, il controllo tramite convergenza uniforme diventa uno strumento essenziale per rendere rigorosi passaggi che in precedenza erano spesso manipolati in modo formale.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un disco chiuso interno $|z - z_0| \leq r$, con $r < R$.

2. Scegliere ρ tale che $r < \rho < R$.

3. Usare la convergenza assoluta a distanza ρ per ottenere

$$|a_n|\rho^n \leq M.$$

4. Stimare i termini della serie derivata:

$$|na_n(z - z_0)^{n-1}| \leq \frac{M}{\rho} n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}.$$

5. Concludere che la serie delle derivate converge uniformemente sui dischi chiusi interni.

6. Passare dalle derivate delle somme parziali alla derivata della somma usando la convergenza uniforme della serie e della serie derivata.

Prerequisiti. Serve il risultato sulla convergenza uniforme della serie di potenze sui compatti interni, dimostrato nella Sezione 12.6. Useremo inoltre il criterio di Weierstrass per dimostrare la convergenza uniforme della serie derivata formale.

Useremo anche la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}, \qquad 0 \leq q < 1.$$

Questo segue dalla serie geometrica derivata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad 0 \leq q < 1,$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Infine useremo il seguente principio di derivazione sotto il segno di limite, in una forma adatta al nostro caso. Se F_N sono funzioni derivabili in un disco, se $F_N \to f$ uniformemente sui dischi chiusi interni e se $F'_N \to g$ uniformemente sui dischi chiusi interni, allora f e' derivabile in senso complesso e

$$f' = g.$$

Giustifichiamo brevemente questo principio. Fissiamo un punto w interno al disco e prendiamo $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$, abbastanza piccolo affinche' il segmento

$$\{w + th : \ 0 \leq t \leq 1\}$$

resti nel disco. Per ogni N, applicando il teorema fondamentale del calcolo alla funzione di variabile reale e valori complessi

$$t \mapsto F_N(w + th),$$

otteniamo

$$F_N(w + h) - F_N(w) = \int_0^1 F'_N(w + th)\, h\, dt.$$

Dividendo per $h \neq 0$,

$$\frac{F_N(w + h) - F_N(w)}{h} = \int_0^1 F'_N(w + th)\, dt.$$

Il segmento e' compatto e, per h abbastanza piccolo, e' contenuto in un disco chiuso interno. Su tale disco $F_N \to f$ e $F_N' \to g$ uniformemente. Possiamo quindi passare al limite per $N \to +\infty$:

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \int_0^1 g(w+th)\,dt.$$

Poiche' g e' limite uniforme locale di funzioni continue, e' continua. Facendo ora $h \to 0$, otteniamo

$$\int_0^1 g(w+th)\,dt \to \int_0^1 g(w)\,dt = g(w).$$

Quindi $f'(w) = g(w)$.

Enunciato. Si assuma che:

1. $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$ e' una successione di numeri complessi.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ e' una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$, eventualmente $R = +\infty$.
4. $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ e' definita da
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Tesi. Allora:

1. la funzione f e' derivabile in senso complesso in ogni punto di $B(z_0, R)$;
2. per ogni $z \in B(z_0, R)$ vale
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un numero r tale che $0 < r < R$. Scegliamo ρ con

$$r < \rho < R.$$

Se $R = +\infty$, scegliamo semplicemente un qualunque $\rho > r$.

Poiche' $\rho < R$, la serie di potenze converge assolutamente nel punto $z_1 = z_0 + \rho$. Quindi converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\rho^n.$$

In particolare il termine generale $|a_n|\rho^n$ tende a zero, quindi e' limitato. Esiste dunque $M > 0$ tale che

$$|a_n|\rho^n \leq M \qquad \text{per ogni } n. \tag{152}$$

Consideriamo ora la serie delle derivate formali:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Per $|z - z_0| \leq r$ si ha

$$|n a_n(z-z_0)^{n-1}| = n|a_n|\,|z-z_0|^{n-1} \leq n|a_n|r^{n-1} = \frac{n}{\rho}|a_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1} \leq \frac{M}{\rho} n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}.$$

Prima uguaglianza. Modulo del prodotto.
Prima disuguaglianza. Usiamo $|z - z_0| \leq r$.

Seconda uguaglianza. Moltiplichiamo e dividiamo per ρ^n.
Seconda disuguaglianza. Usiamo la stima (152).

Poiche' $0 < r/\rho < 1$, la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{\rho} n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}$$

converge. Per il criterio di Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

converge uniformemente su $\overline{B(z_0, r)}$.

Indichiamo con

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n$$

le somme parziali. Ogni F_N e' un polinomio, quindi e' derivabile, e

$$F_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Dal teorema sulla convergenza uniforme sui compatti interni, $F_N \to f$ uniformemente su $\overline{B(z_0, r)}$. Inoltre, per quanto appena dimostrato, F_N' converge uniformemente su $\overline{B(z_0, r)}$ alla funzione

$$g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Per il principio di derivazione sotto il segno di serie, segue che f e' derivabile in ogni punto interno a $\overline{B(z_0, r)}$ e che

$$f'(z) = g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Sia ora $z \in B(z_0, R)$. Se $R < +\infty$, allora $|z - z_0| < R$, quindi possiamo scegliere r tale che

$$|z - z_0| < r < R.$$

Se invece $R = +\infty$, scegliamo semplicemente un qualunque $r > |z - z_0|$. Per quanto dimostrato sopra, f e' derivabile in ogni punto interno di $\overline{B(z_0, r)}$. In particolare f e' derivabile in z, e vale

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Poiche' z era arbitrario, la formula vale per ogni $z \in B(z_0, R)$.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $R > 0$ serve per avere un disco aperto non vuoto in cui studiare la funzione somma. Se $R = 0$, la serie converge solo nel centro e non c'e' un intorno aperto su cui parlare di derivabilita' complessa della somma.

Il fatto che la serie sia una serie di potenze e' essenziale: la derivata di $(z - z_0)^n$ produce esattamente il termine $n(z - z_0)^{n-1}$. Inoltre la struttura in potenze permette la stima uniforme tramite il rapporto $r/\rho < 1$.

La condizione di lavorare dentro il disco di convergenza, cioe' con $|z - z_0| < R$, permette di scegliere un raggio intermedio ρ. Senza questo margine non si ottiene la serie maggiorante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{\rho} n \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-1}.$$

Osservazione. La formula ottenuta e'

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Ripetendo il teorema appena dimostrato alla serie derivata, poi alla serie derivata seconda, e cosi' via, si ottiene che una serie di potenze e' derivabile infinite volte nel suo disco di convergenza.

In particolare, valutando la derivata k-esima nel centro z_0, si ottiene

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k.$$

Questa identita' sara' il collegamento naturale tra serie di potenze e formule di Taylor.

12.8 Le serie di potenze definiscono funzioni olomorfe

Idea della dimostrazione e contesto. Il risultato precedente ha mostrato che una serie di potenze si puo' derivare termine a termine dentro il suo disco di convergenza. Questa sezione ne ricava la conseguenza piu' importante: la somma di una serie di potenze non e' solo una funzione definita punto per punto, ma e' una funzione olomorfa.

In questo modo si stabilisce il ponte tra serie di potenze e analisi complessa: ogni serie di potenze, nel suo disco di convergenza, produce automaticamente una funzione derivabile in senso complesso. Storicamente, questo legame tra sviluppi in serie e funzioni analitiche e' uno dei nuclei della formulazione moderna dell'analisi complessa nell'Ottocento.

Struttura della dimostrazione.

1. Considerare la funzione somma della serie di potenze nel disco di convergenza.
2. Applicare il teorema di derivazione termine a termine.
3. Concludere che la funzione e' derivabile in senso complesso in ogni punto del disco, cioe' e' olomorfa.

Prerequisiti. Serve la definizione di funzione olomorfa: una funzione e' olomorfa in un aperto se e' derivabile in senso complesso in ogni punto di quell'aperto.

Serve inoltre il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze, dimostrato nella Sezione 12.7: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$, allora la funzione somma e' derivabile in ogni punto di $B(z_0, R)$ e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$ e' una successione di numeri complessi.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ e' una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$, eventualmente $R = +\infty$.
4. Con la convenzione $B(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$, $f : B(z_0, R) \to \mathbb{C}$ e' definita da

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Tesi. Allora f e' olomorfa in $B(z_0, R)$ e, per ogni $z \in B(z_0, R)$, vale

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Dimostrazione. Per il teorema di derivazione termine a termine delle serie di potenze, applicato alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

la funzione somma f e' derivabile in senso complesso in ogni punto del disco $B(z_0, R)$. Inoltre, per ogni $z \in B(z_0, R)$, la sua derivata e'

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}.$$

Poiche' $B(z_0, R)$ e' un aperto e f e' derivabile in senso complesso in ogni suo punto, per definizione f e' olomorfa in $B(z_0, R)$.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $R > 0$ serve per avere un disco aperto non vuoto su cui parlare di olomorfia. Se $R = 0$, la serie converge solo nel centro e non definisce una funzione su un intorno aperto del centro.

Il fatto che si tratti di una serie di potenze e' essenziale: il risultato si basa sulla derivazione termine a termine, che sfrutta la struttura dei termini $(z - z_0)^n$. Una serie di funzioni generiche puo' convergere puntualmente, o anche uniformemente, senza che la funzione limite sia automaticamente derivabile.

La restrizione a $B(z_0, R)$ e' naturale: fuori dal disco di convergenza la serie non converge, mentre sul bordo $|z - z_0| = R$ il comportamento dipende dalla serie e non e' controllato dal solo raggio di convergenza.

Osservazione. Questo risultato spiega perche' le serie di potenze sono una sorgente naturale di funzioni olomorfe. In seguito si dimostrera' anche il verso opposto, in forma locale: ogni funzione olomorfa e' localmente rappresentabile mediante una serie di potenze, cioe' mediante il suo sviluppo di Taylor.

12.9 Regole di derivazione per funzioni complesse

Idea della dimostrazione e contesto. Le regole di derivazione per funzioni complesse hanno la stessa forma di quelle del calcolo reale. Questo e' uno dei motivi per cui, una volta introdotta la derivata complessa, il calcolo su funzioni olomorfe diventa molto trasparente: somme, prodotti, quozienti e composizioni si trattano con le stesse regole familiari.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere gli incrementi di f e g nella forma

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h\,\alpha(h), \qquad g(z_0 + h) = g(z_0) + h\,\beta(h),$$

   con $\alpha(h) \to f'(z_0)$ e $\beta(h) \to g'(z_0)$.

2. Sostituire queste scritture nelle differenze di somma e prodotto.
3. Calcolare direttamente la derivata del reciproco con il quoziente incrementale.
4. Ottenere la regola del quoziente dal prodotto con il reciproco.
5. Scrivere l'incremento della composizione $G \circ f$ e fattorizzare il termine $f(z_0 + h) - f(z_0)$.

Prerequisiti. Serve la definizione di derivata complessa in un punto:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Serve inoltre il fatto elementare che una funzione derivabile e' continua, e quindi che i valori $f(z_0 + h)$ e $g(z_0 + h)$ tendono rispettivamente a $f(z_0)$ e $g(z_0)$ quando $h \to 0$.

Enunciato.

Somma e prodotto. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto.
2. $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ siano derivabili in senso complesso in un punto $z_0 \in \Omega$.

Tesi. Allora

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \qquad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Quoziente. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto.
2. $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ siano derivabili in senso complesso in un punto $z_0 \in \Omega$.
3. $g(z_0) \neq 0$.

Tesi. Allora f/g e' derivabile in senso complesso in z_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Composizione. Si assuma che:

1. $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ siano aperti.
2. $f : \Omega \to \Omega'$ sia derivabile in senso complesso in $z_0 \in \Omega$.
3. $G : \Omega' \to \mathbb{C}$ sia derivabile in senso complesso in $w_0 = f(z_0)$.

Tesi. Allora $G \circ f$ e' derivabile in senso complesso in z_0 e

$$(G \circ f)'(z_0) = G'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h\,\alpha(h), \qquad g(z_0+h) = g(z_0) + h\,\beta(h),$$

dove

$$\alpha(h) = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}, \qquad \beta(h) = \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h}.$$

Per definizione di derivata, $\alpha(h) \to f'(z_0)$ e $\beta(h) \to g'(z_0)$ quando $h \to 0$.

Per la somma,

$$\frac{(f+g)(z_0+h) - (f+g)(z_0)}{h} = \alpha(h) + \beta(h),$$

e passando al limite otteniamo subito

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

Per il prodotto,

$$f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0)g(z_0) = h\,\alpha(h)\,g(z_0+h) + h\,f(z_0)\,\beta(h),$$

quindi

$$\frac{(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0)}{h} = \alpha(h)\,g(z_0+h) + f(z_0)\,\beta(h).$$

Facendo $h \to 0$, e usando la continuita' di g, segue

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Per il reciproco, poiche' $g(z_0) \neq 0$ e g e' continua in z_0, esiste un intorno di z_0 in cui g non si annulla. In tale intorno la funzione $1/g$ e' ben definita.

Calcoliamo direttamente:

$$\frac{\dfrac{1}{g(z_0+h)} - \dfrac{1}{g(z_0)}}{h} = \frac{g(z_0) - g(z_0+h)}{h\, g(z_0+h) g(z_0)} = -\frac{1}{g(z_0+h) g(z_0)} \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h}.$$

Facendo $h \to 0$, usando $g(z_0+h) \to g(z_0)$, otteniamo

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Quindi, per il quoziente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0)\frac{1}{g(z_0)} + f(z_0)\left(-\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}\right),$$

cioe'

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Per la composizione, scriviamo $w_0 = f(z_0)$. Definiamo

$$\gamma(k) = \begin{cases} \dfrac{G(w_0+k) - G(w_0)}{k}, & k \neq 0, \\ G'(w_0), & k = 0. \end{cases}$$

Allora $\gamma(k) \to G'(w_0)$ per $k \to 0$ e, per ogni k vicino a zero, vale

$$G(w_0+k) = G(w_0) + k\,\gamma(k).$$

Prendiamo

$$k = f(z_0+h) - f(z_0).$$

Allora

$$G(f(z_0+h)) - G(f(z_0)) = \big(f(z_0+h) - f(z_0)\big)\,\gamma\big(f(z_0+h) - f(z_0)\big).$$

Dividendo per h,

$$\frac{G(f(z_0+h)) - G(f(z_0))}{h} = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\,\gamma\big(f(z_0+h) - f(z_0)\big).$$

Facendo $h \to 0$, il primo fattore tende a $f'(z_0)$, mentre il secondo tende a $G'(f(z_0))$. Dunque

$$(G \circ f)'(z_0) = G'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi di derivabilita' complessa in z_0 e' il punto di partenza: senza di essa non esistono gli sviluppi lineari usati nella prova.

La condizione $g(z_0) \neq 0$ e' necessaria per il quoziente. Se viene meno, il reciproco non e' definito nel punto e la formula non ha senso.

Per la composizione serve che l'immagine di f cada nel dominio di G, al meno in un intorno di z_0. Altrimenti $G \circ f$ potrebbe non essere definita. La formula finale usa inoltre la derivabilita' di G nel punto $f(z_0)$.

Osservazione. Queste regole permettono di manipolare funzioni complesse con gli stessi strumenti del calcolo differenziale reale. In combinazione con le proprieta' delle funzioni olomorfe, diventano la base operativa di gran parte dei calcoli successivi.

12.10 Equazioni di Cauchy-Riemann: condizione necessaria

Idea della dimostrazione e contesto. Le equazioni di Cauchy-Riemann esprimono il vincolo che la derivabilita' complessa impone alle derivate parziali delle parti reale e immaginaria di una funzione. In particolare, non sono una definizione astratta: emergono direttamente dal confronto tra la derivata complessa calcolata lungo la direzione reale e lungo la direzione immaginaria.

Questo risultato e' importante perche' mostra che la derivabilita' complessa e' molto piu' rigida della derivabilita' reale in due variabili. Una funzione puo' avere derivate parziali senza essere derivabile in senso complesso; qui si vede quale compatibilita' in piu' e' richiesta.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere il quoziente incrementale per un incremento reale $h \in \mathbb{R}$.
2. Scrivere il quoziente incrementale per un incremento puramente immaginario $h = it$, con $t \in \mathbb{R}$.
3. Confrontare i due limiti, che devono coincidere con la stessa derivata complessa.
4. Leggere da questo confronto l'esistenza delle derivate parziali e le equazioni di Cauchy-Riemann.

Prerequisiti. Serve la definizione di derivata complessa in un punto:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Serve inoltre la scrittura $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con u, v funzioni reali di due variabili.

Enunciato. Si assuma che:

1. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia derivabile in senso complesso in un punto $z_0 = x_0 + iy_0$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto.
2. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$.

Tesi. Allora esistono le derivate parziali di u e v in (x_0, y_0) e vale

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Dimostrazione. Poiche' f e' derivabile in senso complesso in z_0, il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

esiste ed e' indipendente dalla direzione con cui $h \to 0$.

Prendiamo prima $h = t \in \mathbb{R}$, con $t \neq 0$. Allora

$$\frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i\,\frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t}.$$

Passando al limite per $t \to 0$, otteniamo che esistono $u_x(x_0, y_0)$ e $v_x(x_0, y_0)$ e che

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0).$$

Prendiamo ora $h = it$, con $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Allora

$$\frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{it} + i\,\frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{it}.$$

Moltiplicando e dividendo per i, si ha

$$\frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} - i\,\frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t}.$$

Passando al limite per $t \to 0$, otteniamo che esistono $u_y(x_0, y_0)$ e $v_y(x_0, y_0)$ e che

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0).$$

Le due espressioni devono coincidere, perche' rappresentano la stessa derivata complessa. Quindi

$$u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0).$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria, segue

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi di derivabilita' complessa e' decisiva: il confronto tra gli incrementi reale e immaginario ha senso solo se il quoziente incrementale ha un limite unico indipendente dalla direzione.

La scrittura $f = u + iv$ e' solo una decomposizione, ma rende visibile il contenuto delle equazioni di Cauchy-Riemann. Senza separare parte reale e immaginaria, il vincolo non si vede.

Il fatto che l'aperto contenga un intorno di z_0 garantisce che gli incrementi t e it restino nel dominio per t abbastanza piccolo.

Osservazione. Le equazioni di Cauchy-Riemann sono quindi una condizione necessaria per la derivabilita' complessa. Da sole, pero', non sono sufficienti in generale: per ottenere il converso servono ipotesi aggiuntive di regolarita', per esempio la continuita' delle derivate parziali in un intorno del punto.

12.11 Equazioni di Cauchy-Riemann: condizione sufficiente

Idea della dimostrazione e contesto. Questo e' il converso locale del risultato precedente: se le parti reale e immaginaria sono abbastanza regolari e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann in un punto, allora la funzione e' derivabile in senso complesso in quel punto. Il contenuto e' importante perche' chiarisce che le equazioni di Cauchy-Riemann non sono solo una conseguenza della derivabilita' complessa, ma diventano anche un criterio sufficiente una volta assunta una regolarita' reale adeguata.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere l'incremento di u e di v tramite il differenziale reale in (x_0, y_0).
2. Raggruppare i termini lineari usando le equazioni di Cauchy-Riemann.
3. Riconoscere il termine principale come un multiplo complesso di $h = \Delta x + i\Delta y$.
4. Dividere per h e passare al limite.

Prerequisiti. Serve il fatto elementare del calcolo in piu' variabili: se $u, v \in C^1$ in un intorno di (x_0, y_0), allora sono differenziabili in senso reale in quel punto e gli incrementi ammettono uno sviluppo lineare con resto piccolo rispetto alla distanza dall'origine.

Enunciato. Si assuma che:

1. f e' definita in un intorno di $z_0 = x_0 + iy_0$ e

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

2. $u, v \in C^1$ in un intorno di (x_0, y_0).
3. In (x_0, y_0) valgano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Tesi. Allora f e' derivabile in senso complesso in z_0.

Dimostrazione. Poniamo $h = \Delta x + i\Delta y$, cosi' che $|h| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Poiche' $u, v \in C^1$ in un intorno di (x_0, y_0), esistono funzioni $\varepsilon_u(h)$ e $\varepsilon_v(h)$ tali che $\varepsilon_u(h) \to 0$ e $\varepsilon_v(h) \to 0$ per $h \to 0$, e si ha

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_u(h)\,|h|,$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_v(h)\,|h|.$$

Sottraendo i valori in z_0 e raccogliendo parte reale e immaginaria, otteniamo

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \big(u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0)\big)\Delta x + \big(u_y(x_0, y_0) + i\,v_y(x_0, y_0)\big)\Delta y + \big(\varepsilon_u(h) + i\,\varepsilon_v(h)\big)|h|.$$

Usando le equazioni di Cauchy-Riemann,

$$u_y(x_0, y_0) + i\,v_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) + i\,u_x(x_0, y_0) = i\big(u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0)\big),$$

quindi la parte lineare diventa

$$\big(u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0)\big)(\Delta x + i\Delta y) = \big(u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0)\big)h.$$

Pertanto

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0) + \big(\varepsilon_u(h) + i\,\varepsilon_v(h)\big)\frac{|h|}{h}.$$

Poiche' $\left|\frac{|h|}{h}\right| = 1$ per $h \neq 0$ e $\varepsilon_u(h), \varepsilon_v(h) \to 0$, l'ultimo termine tende a zero. Segue che esiste il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0),$$

cioe'

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0).$$

Quindi f e' derivabile in senso complesso in z_0.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $u, v \in C^1$ serve per avere uno sviluppo lineare con resto piccolo rispetto a $|h|$. Senza questa regolarita' reale, le equazioni di Cauchy-Riemann da sole non bastano.

Le equazioni di Cauchy-Riemann sono il punto che permette di ricombinare i termini in un unico fattore complesso h. Senza di esse, la parte lineare non sarebbe compatibile con una derivata complessa.

Osservazione. La parte conclusiva mostra anche la formula esplicita della derivata:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\,u_y(x_0, y_0).$$

Questo sara' utile ogni volta che si voglia verificare la derivabilita' complessa a partire da un'espressione cartesiana.

12.12 Stima ML per integrali complessi

Idea della dimostrazione e contesto. La stima ML e' il controllo di base degli integrali complessi lungo una curva. Dice che il modulo dell'integrale non puo' superare la lunghezza della curva moltiplicata per il massimo del modulo dell'integranda sulla curva. E' il passaggio tecnico che trasforma una formula integrale in una stima quantitativa.

In analisi complessa questa disuguaglianza compare ovunque: nelle formule di Cauchy, nelle stime di Cauchy per le derivate, nel teorema di Liouville e nei calcoli con i residui.

Struttura della dimostrazione.

1. Parametrizzare la curva γ con una funzione a tratti C^1.
2. Riscrivere l'integrale complesso come integrale di una funzione di variabile reale.
3. Stimare il modulo dell'integrale con la disuguaglianza triangolare.
4. Riconoscere la lunghezza della curva come integrale di $|\gamma'(t)|$.

Prerequisiti. Servono la definizione di integrale complesso lungo una curva regolare a tratti e la definizione di lunghezza di una curva:

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_a^b g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt, \qquad L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Se γ e' solo regolare a tratti, gli integrali precedenti si intendono come somma degli integrali sui sottointervalli in cui γ e' C^1. Serve inoltre la disuguaglianza triangolare per gli integrali reali:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|\,dt.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sia una curva regolare a tratti.
2. g sia continua su un intorno dell'immagine di γ.

Tesi. Allora

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma([a,b])} |g(z)|.$$

Dimostrazione. Scriviamo l'integrale lungo γ nella forma parametrica:

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_a^b g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Prendendo il modulo e applicando la disuguaglianza triangolare per gli integrali reali, otteniamo

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |g(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Poiche' g e' continua sull'immagine compatta di γ, esiste il massimo

$$M = \max_{z\in\gamma([a,b])} |g(z)|.$$

Quindi, per ogni $t \in [a,b]$,

$$|g(\gamma(t))| \le M.$$

Ne segue

$$\int_a^b |g(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Per definizione di lunghezza,

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = L(\gamma).$$

Pertanto

$$\left|\int_\gamma g(z)\,dz\right| \le M\,L(\gamma) = L(\gamma) \max_{z\in\gamma([a,b])} |g(z)|.$$

Ruolo delle ipotesi. La regolarita' a tratti della curva serve per poter definire l'integrale complesso e la lunghezza tramite una parametrizzazione derivabile a tratti.

La continuita' di g sull'immagine di γ garantisce l'esistenza del massimo di $|g|$ sulla curva, perche' l'immagine della curva e' compatta.

Osservazione. Questa stima e' il ponte tecnico che permette di trasformare i dati geometrici della curva e il controllo dell'integranda in una stima esplicita degli integrali complessi. Per questo compare in modo sistematico nelle dimostrazioni successive.

12.13 Teorema di Cauchy-Goursat

Il teorema di Cauchy-Goursat e' la versione del teorema di Cauchy che elimina l'ipotesi di continuita' di f'. Il suo nucleo e' il risultato triangolare: l'integrale di una funzione olomorfa sul bordo di un triangolo contenuto nel dominio e' nullo. Da questo risultato, tramite triangolazioni, primitive locali e semplice connessione, si ottiene la forma globale: in un dominio semplicemente connesso, l'integrale lungo ogni curva chiusa regolare a tratti e' nullo.
Enunciato. Siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un dominio semplicemente connesso.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $\gamma \subset \Omega$ e' una curva chiusa regolare a tratti.

Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Tutto il blocco seguente va letto come un unico grande argomento. La prima dimostrazione, quella del teorema di Cauchy per funzioni con derivate continue, non e' la forma piu' generale del risultato, ma e' molto istruttiva: usando il teorema di Green mostra geometricamente perche' l'integrale complesso si scompone in una parte di lavoro e una parte di flusso, e perche' le equazioni di Cauchy-Riemann annullano entrambe. Questa versione richiede ipotesi piu' forti, ma fornisce una lettura intuitiva del fenomeno.

La dimostrazione di Cauchy-Goursat vera e propria viene poi separata in piu' parti perche' il risultato generale contiene passaggi di natura diversa. Il primo mattone e' il teorema per triangoli: qui si usa direttamente la differenziabilita' complessa e si mostra che l'integrale sul bordo di un triangolo e' nullo, senza assumere la continuita' di f'. Da questo si passa ai poligoni mediante triangolazione e cancellazione dei lati interni. Infine, per arrivare alle curve chiuse generali, conviene introdurre le primitive: prima locali, poi globali nei domini semplicemente connessi.

Questa organizzazione evita di nascondere in un unico argomento passaggi concettualmente diversi. In particolare, la dimostrazione che piu' spesso viene chiesta negli esami orali e' quella per triangoli, perche' e' il nucleo centrale e abbastanza standard del teorema di Cauchy-Goursat. In alcuni corsi o manuali lo stesso nucleo viene presentato usando quadrati invece di triangoli; l'idea pero' resta la stessa: suddividere la figura, scegliere pezzi sempre piu' piccoli e usare la differenziabilita' complessa per forzare l'annullamento dell'integrale. La generalizzazione successiva a poligoni, primitive e curve chiuse puo' essere svolta con metodi leggermente diversi a seconda del corso.

12.13.1 Teorema di Cauchy per funzioni con derivate continue

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema di Cauchy e' uno dei risultati centrali dell'analisi complessa: afferma che, sotto ipotesi opportune, l'integrale di una funzione olomorfa lungo una curva chiusa e' nullo. In altre parole, se si parte da un punto, si percorre una curva chiusa e si torna al punto di partenza, il contributo complessivo dell'integrale si cancella.

Questa versione del teorema e' particolarmente utile dal punto di vista intuitivo perche' collega l'integrale complesso a due oggetti reali familiari: il lavoro e il flusso di un campo vettoriale piano. Scrivendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad dz = dx + i\, dy,$$

l'integrale complesso si separa in una parte reale e in una parte immaginaria: la parte reale e' il lavoro del campo $F = (u, -v)$, mentre la parte immaginaria e' il flusso dello stesso campo. La dimostrazione consiste nel mostrare che, per una funzione olomorfa, entrambe queste quantita' sono nulle su una curva chiusa.

Il motivo e' contenuto nelle equazioni di Cauchy-Riemann. Esse dicono che il campo associato a f ha contemporaneamente rotore nullo e divergenza nulla: non produce circolazione interna e non produce sorgenti o pozzi interni. Il teorema di Green traduce allora questa informazione locale in una conclusione globale sull'integrale lungo il bordo.

Nota storica. Il risultato e' legato al lavoro di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Nel 1825, nel *Memoire sur les integrales definies prises entre des limites imaginaires*, Cauchy studio' gli integrali lungo cammini nel piano complesso e fece emergere il principio secondo cui, in assenza di singolarita', l'integrale non dipende dal cammino. Un antecedente non pubblicato viene spesso ricondotto a Carl Friedrich Gauss, che nel 1811 ne menziono' l'idea in una lettera a Friedrich Wilhelm Bessel. Dal punto di vista didattico, pero', il nome centrale resta Cauchy, perche' fu lui a trasformare questi calcoli in una teoria degli integrali complessi.

Anche il teorema di Green ha una storia rilevante per questa dimostrazione: George Green (1793-1841) lo introdusse nel suo saggio del 1828 sull'applicazione dell'analisi matematica all'elettricita' e al magnetismo. In questa prova il teorema di Cauchy viene quindi letto attraverso un ponte tra analisi complessa e calcolo vettoriale piano.

Questa dimostrazione e' importante perche' spiega geometricamente perche' gli integrali complessi di funzioni olomorfe hanno un comportamento cosi' rigido. Non mostra solo che l'integrale e' nullo: mostra da dove nasce la cancellazione. La versione di Goursat e' piu' forte, perche' elimina l'ipotesi di continuita' della derivata e quindi rende le ipotesi meno stringenti. Edouard Goursat (1858-1936) pubblico' nel 1884 una dimostrazione che non richiede la continuita' di f'; per questo il risultato generale e' spesso chiamato teorema di Cauchy-Goursat. Tuttavia questa dimostrazione resta una delle piu' istruttive: mette in evidenza il legame tra olomorfia, Cauchy-Riemann, rotore, divergenza e teorema di Green.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere $f = u + iv$ e decomporre l'integrale complesso:
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$
2. Interpretare i due integrali reali come lavoro e flusso del campo $F = (u, -v)$.
3. Applicare il teorema di Green alla parte reale e alla parte immaginaria.
4. Usare le equazioni di Cauchy-Riemann per mostrare che
$$\operatorname{rot} F = 0, \qquad \operatorname{div} F = 0.$$
5. Concludere che entrambe le componenti dell'integrale complesso sono nulle.

Prerequisiti. Per seguire questa dimostrazione e' necessario avere chiari alcuni concetti di base dell'analisi complessa: funzione olomorfa, insieme aperto, insieme semplicemente connesso e curva chiusa semplice, regolare a tratti. Serve inoltre avere confidenza con gli integrali complessi lungo curve, almeno nel caso in cui la curva sia parametrizzata e l'integrale venga ricondotto a un integrale reale.

Sul versante reale, il primo strumento e' il teorema di Green nella forma del lavoro. Se $F = (P, Q)$, allora
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$
Qui $Q_x - P_y$ e' il rotore scalare del campo piano F.

Il secondo strumento e' la forma bidimensionale del teorema della divergenza. In un corso di Analisi 2 spesso il teorema della divergenza viene usato soprattutto in dimensione tre, per passare da integrali di superficie a integrali di volume. Qui serve invece la sua versione piana:
$$\int_\gamma F \cdot n\,ds = \iint_D \operatorname{div} F\,dx\,dy.$$
Se γ e' orientata positivamente e $F = (P, Q)$, allora
$$F \cdot n\,ds = P\,dy - Q\,dx.$$
Nel caso della dimostrazione useremo $F = (u, -v)$, quindi
$$\int_\gamma F \cdot n\,ds = \int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$
Questa e' la parte immaginaria dell'integrale complesso.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un dominio semplicemente connesso.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa.
3. Scrivendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, si ha $u, v \in C^1(\Omega)$.
4. $\gamma \subset \Omega$ e' una curva chiusa semplice, regolare a tratti, orientata positivamente.

Tesi. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

Poiche' f e' olomorfa e $u, v \in C^1(\Omega)$, valgono le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Scriviamo $dz = dx + i\, dy$ e poniamo

$$F = (P, Q) = (u, -v).$$

In due dimensioni il rotore scalare e la divergenza di F sono

$$\operatorname{rot} F = Q_x - P_y, \qquad \operatorname{div} F = P_x + Q_y.$$

Quindi

$$\operatorname{rot} F = -v_x - u_y, \qquad \operatorname{div} F = u_x - v_y.$$

Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + i\, dy) = \int_\gamma (u\, dx - v\, dy) + i \int_\gamma (v\, dx + u\, dy).$$

Decomposizione dell'integrale complesso. La parte reale e' il lavoro del campo $F = (u, -v)$; la parte immaginaria e' il flusso dello stesso campo.

Poiche' γ e' chiusa semplice, regolare a tratti e orientata positivamente, essa racchiude un dominio D. Inoltre, poiche' Ω e' semplicemente connesso, il dominio D racchiuso da γ e' contenuto in Ω. In caso contrario, γ circonderebbe un buco del dominio. Possiamo quindi applicare il teorema di Green alle due componenti. Per la parte reale,

$$\int_\gamma (u\, dx - v\, dy) = \iint_D \operatorname{rot} F\, dx\, dy = \iint_D (-v_x - u_y)\, dx\, dy.$$

Prima uguaglianza. Formula di Green nella forma del lavoro.
Seconda uguaglianza. Definizione del rotore in due dimensioni, con $P = u$ e $Q = -v$.

Per la parte immaginaria, usiamo la forma di Green per il flusso:

$$\int_\gamma (v\, dx + u\, dy) = \iint_D \operatorname{div} F\, dx\, dy = \iint_D (u_x - v_y)\, dx\, dy.$$

Prima uguaglianza. Formula di Green nella forma del flusso.
Seconda uguaglianza. Definizione della divergenza in due dimensioni, con $P = u$ e $Q = -v$.

Le equazioni di Cauchy-Riemann annullano entrambe le densita' integrande:

$$\operatorname{rot} F = 0, \qquad \operatorname{div} F = 0.$$

Quindi

$$\int_\gamma (u\, dx - v\, dy) = 0, \qquad \int_\gamma (v\, dx + u\, dy) = 0,$$

e pertanto

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che Ω sia semplicemente connesso serve a controllare il dominio racchiuso da γ. Nella dimostrazione, infatti, si applica il teorema di Green su un dominio D avente bordo γ. Per poterlo fare nel contesto della funzione f, il dominio D deve restare contenuto in Ω. Se Ω ha un buco, una curva chiusa puo' circondare una zona dove la funzione non e' definita, e il passaggio

$$\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) = \iint_D \operatorname{rot} F\,dx\,dy$$

non e' piu' applicabile su tutto D.

Controesempio. Prendiamo

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad f(z) = \frac{1}{z}, \qquad \gamma(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

La funzione f e' olomorfa in Ω, quindi le equazioni di Cauchy-Riemann valgono in Ω. Pero' Ω non e' semplicemente connesso e

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\,ie^{it}\,dt = 2\pi i.$$

Dunque il risultato fallisce.

L'ipotesi che f sia olomorfa fornisce la struttura complessa usata nella dimostrazione. Prima informazione: possiamo scrivere

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

e tradurre l'integrale complesso in due integrali reali:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$

Senza questa decomposizione non si vede la parte di lavoro e la parte di flusso, quindi non si arriva alle formule di Green usate nella dimostrazione.

Seconda informazione: dall'olomorfia, insieme alla regolarita' $u, v \in C^1(\Omega)$, seguono le equazioni di Cauchy-Riemann. Questo e' il punto in cui entra la struttura complessa. Con $F = (u, -v)$, esse danno

$$\operatorname{rot} F = -v_x - u_y = 0, \qquad \operatorname{div} F = u_x - v_y = 0.$$

Quindi annullano sia la densita' di lavoro sia la densita' di flusso. Senza questa parte dell'olomorfia, il calcolo con Green produrrebbe in generale due integrali doppi non nulli.

L'ipotesi $u, v \in C^1(\Omega)$ e' stata scritta separatamente per rendere questa dimostrazione autonoma rispetto al teorema di Cauchy-Goursat. Nella teoria completa l'olomorfia implica molta piu' regolarita' di quella richiesta qui; tuttavia questa dimostrazione usa Green nella forma classica, quindi ha bisogno esplicitamente della continuita' delle derivate parziali di u e v. Senza questa regolarita', il passaggio dagli integrali sul bordo agli integrali doppi non sarebbe giustificato con questo argomento. In altre parole, il risultato puo' anche restare vero per teoremi piu' profondi, ma questa dimostrazione non lo prova.

Controesempio. Prendiamo $f(z) = \overline{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Allora

$$f(z) = x - iy, \qquad u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = -y.$$

Le equazioni di Cauchy-Riemann non valgono, perche'

$$u_x = 1, \qquad v_y = -1.$$

Inoltre

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\,dt = 2\pi i.$$

Dunque il risultato fallisce.

Infine, l'ipotesi che γ sia chiusa semplice, regolare a tratti e orientata positivamente serve in tre punti distinti. La chiusura permette di interpretare γ come bordo; la semplicita' evita autointersezioni e permette di parlare senza ambiguita' del dominio D racchiuso da γ; la regolarita' a tratti garantisce che gli integrali curvilinei siano ben definiti e che il teorema di Green sia applicabile. L'orientazione positiva fissa il segno nelle formule di Green. Se la curva non e' chiusa, non c'e' alcun motivo per cui l'integrale debba annullarsi: per esempio, per $f(z) = 1$ e per il segmento $\gamma(t) = t$, $0 \le t \le 1$, si ha

$$\int_\gamma 1\,dz = \int_0^1 1\,dt = 1.$$

12.13.2 Teorema di Cauchy-Goursat per triangoli

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema di Cauchy-Goursat e' la forma profonda del teorema di Cauchy: afferma che l'integrale di una funzione olomorfa lungo il bordo di un triangolo e' nullo senza assumere la continuita' della derivata. Rispetto alla dimostrazione precedente, non si usa il teorema di Green e non si passa per rotore e divergenza. La sola informazione locale usata e' la differenziabilita' complessa.

Il punto concettuale e' questo: se l'integrale sul bordo del triangolo iniziale fosse non nullo, suddividendo ripetutamente il triangolo si potrebbe trovare una successione di triangoli sempre piu' piccoli sui cui bordi l'integrale resta proporzionalmente non troppo piccolo. Ma su triangoli molto piccoli una funzione olomorfa e' ben approssimata dalla sua parte affine

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

Questa parte affine ha primitiva, quindi il suo integrale su un cammino chiuso e' nullo. Resta solo un errore infinitesimo, troppo piccolo per sostenere un integrale non nullo. Da qui nasce la contraddizione.

Storicamente, questo passaggio e' decisivo. Cauchy aveva ottenuto il teorema sotto ipotesi piu' regolari; Edouard Goursat mostro' che la continuita' di f' non e' necessaria. Per questo il risultato viene chiamato teorema di Cauchy-Goursat.

Struttura della dimostrazione.

1. Indicare con
$$I_0 = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$$
l'integrale da dimostrare nullo.

2. Dividere il triangolo in quattro triangoli simili e usare la cancellazione dei lati interni:
$$I_0 = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_{1,j}} f(z)\,dz.$$

3. Scegliere un sottotriangolo su cui l'integrale non sia troppo piccolo e iterare la costruzione, ottenendo
$$|I_n| \ge \frac{|I_0|}{4^n}.$$

4. Usare la compattezza dei triangoli nidificati per ottenere un punto limite z_0.

5. Usare la differenziabilita' complessa in z_0:
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z), \qquad \varepsilon(z) \to 0.$$

6. Mostrare che i primi due termini hanno integrale nullo sul bordo e stimare il resto con la disuguaglianza ML.

7. Confrontare la stima superiore con la stima inferiore e concludere che $|I_0| = 0$.

Prerequisiti. Per seguire la dimostrazione servono gli integrali complessi lungo curve regolari a tratti e il fatto che, se una funzione ha primitiva in un aperto, allora il suo integrale lungo un cammino chiuso e' nullo. In particolare, questo verra' usato per le funzioni

$$f(z_0), \qquad f'(z_0)(z - z_0),$$

che hanno primitive immediate.

Serve poi la stima ML per gli integrali curvilinei: se Γ e' un cammino di lunghezza L e $|g(z)| \le M$ su Γ, allora

$$\left| \int_\Gamma g(z)\, dz \right| \le ML.$$

Infine, serve il fatto topologico elementare sui compatti nidificati: una successione decrescente di compatti non vuoti con diametri che tendono a zero ha intersezione formata da un solo punto.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $\Delta \subset \Omega$ e' un triangolo chiuso, cioe' il triangolo insieme al suo bordo e' contenuto in Ω.
4. $\partial\Delta$ e' il bordo di Δ, orientato positivamente.

Tesi. Allora

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. Indichiamo con

$$I_0 = \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz$$

l'integrale che vogliamo dimostrare nullo. L'idea della dimostrazione e' questa: suddividiamo il triangolo in triangoli sempre piu' piccoli e scegliamo, a ogni passo, un triangolo sul cui bordo l'integrale non sia troppo piccolo rispetto a I_0. Se $I_0 \neq 0$, otteniamo una successione di triangoli sempre piu' piccoli nei quali l'integrale resta proporzionale a I_0. Alla fine useremo la differenziabilita' complessa di f in un punto limite per mostrare che, su triangoli abbastanza piccoli, quell'integrale deve essere invece arbitrariamente piccolo. Questo forzera' $I_0 = 0$.

Dividiamo Δ nei quattro triangoli ottenuti congiungendo i punti medi dei lati. Li indichiamo con

$$\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}, \Delta_{1,4}.$$

Sui lati interni gli integrali compaiono due volte con orientazioni opposte, quindi si cancellano. Pertanto

$$I_0 = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_{1,j}} f(z)\, dz.$$

Cancellazione dei lati interni. I bordi dei quattro triangoli riproducono il bordo esterno di Δ, mentre ogni lato interno e' percorso una volta in ciascun verso.

Dalla disuguaglianza triangolare segue che almeno uno dei quattro integrali ha modulo non minore di $|I_0|/4$. Scegliamo uno di questi triangoli e chiamiamolo Δ_1. Allora

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz \right| \ge \frac{|I_0|}{4}.$$

Scelta di Δ_1. Se tutti e quattro gli integrali avessero modulo minore di $|I_0|/4$, la loro somma avrebbe modulo minore di $|I_0|$, contro la formula precedente.

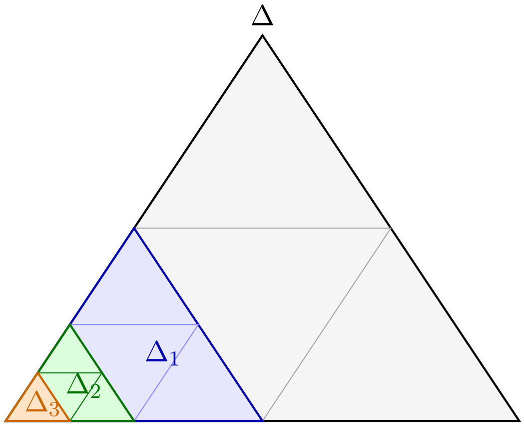

Figura 1: Suddivisione successiva in quattro triangoli e scelta di una successione nidificata $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3$.

Ripetiamo la stessa costruzione su Δ_1, poi sul triangolo scelto al passo successivo, e cosi' via. Otteniamo una successione di triangoli chiusi nidificati

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \cdots$$

tali che, se

$$I_n = \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz,$$

allora

$$|I_n| \geq \frac{|I_0|}{4^n}. \tag{153}$$

Formula (153). A ogni suddivisione scegliamo un sottotriangolo il cui integrale ha modulo almeno un quarto del modulo dell'integrale precedente.

Se L_0 e' il perimetro di Δ e d_0 il suo diametro, allora

$$L_n = \frac{L_0}{2^n}, \qquad d_n = \frac{d_0}{2^n}.$$

Prima formula. Ogni lato dei triangoli scelti e' lungo la meta' del lato corrispondente al passo precedente. Seconda formula. Anche il diametro si dimezza a ogni passo.

Poiche' i triangoli Δ_n sono compatti, non vuoti, nidificati e con diametro che tende a zero, la loro intersezione contiene un solo punto. Lo chiamiamo z_0:

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Geometricamente, stiamo scegliendo triangoli chiusi uno dentro l'altro, sempre piu' piccoli; quindi essi si restringono attorno a un unico punto.
Compattezza e diametri infinitesimi. I triangoli sono chiusi e limitati; la nidificazione garantisce intersezione non vuota, mentre $d_n \to 0$ garantisce unicita' del punto.

Ora usiamo l'ipotesi essenziale: f e' olomorfa in Ω, quindi e' differenziabile in senso complesso in z_0. Dunque esiste una funzione $\varepsilon(z)$, definita per z vicino a z_0, tale che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z), \qquad \varepsilon(z) \to 0 \quad \text{per } z \to z_0.$$

Differenziabilita' complessa in z_0. Il termine $(z - z_0)\varepsilon(z)$ e' il resto infinitesimo rispetto a $z - z_0$. Definiamo, se necessario, $\varepsilon(z_0) = 0$. In questo modo la formula precedente resta valida anche per $z = z_0$.

Poiche' $z_0 \in \Delta \subset \Omega$ e Ω e' aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset \Omega$. Inoltre $z_0 \in \Delta_n$ per ogni n e i diametri d_n tendono a zero, quindi per n abbastanza grande si ha

$$\Delta_n \subset B(z_0, r).$$

In questo modo lo sviluppo locale di f attorno a z_0 e' valido su tutto Δ_n. Quindi

$$I_n = \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} \Big[f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + (z-z_0)\varepsilon(z)\Big]\,dz.$$

Seconda uguaglianza. Sostituzione dello sviluppo locale di f nel punto z_0.

I primi due contributi sono nulli:

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz = 0, \qquad \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz = 0.$$

Primo integrale. La funzione costante $f(z_0)$ ha primitiva $f(z_0)z$.
Secondo integrale. La funzione $f'(z_0)(z-z_0)$ ha primitiva $\frac{f'(z_0)}{2}(z-z_0)^2$.

Rimane dunque

$$I_n = \int_{\partial\Delta_n} (z-z_0)\varepsilon(z)\,dz. \tag{154}$$

Formula (154). I termini con primitiva danno contributo nullo lungo il cammino chiuso $\partial\Delta_n$.

Ora stimiamo l'integrale rimasto. Fissiamo $\eta > 0$. Poiche' $\varepsilon(z) \to 0$ per $z \to z_0$, esiste un intorno U di z_0 tale che

$$|\varepsilon(z)| \le \eta \qquad \text{per ogni } z \in U.$$

I triangoli Δ_n sono nidificati, contengono z_0 e hanno diametro che tende a zero; quindi per n abbastanza grande si ha

$$\Delta_n \subset U.$$

Dunque, per n abbastanza grande,

$$|\varepsilon(z)| \le \eta \qquad \text{per ogni } z \in \Delta_n.$$

Prima formula. Definizione di limite $\varepsilon(z) \to 0$.
Seconda formula. Poiche' $z_0 \in \Delta_n$ e $d_n \to 0$, i triangoli abbastanza piccoli sono contenuti in qualunque intorno fissato di z_0.

In particolare, la stessa stima vale sul bordo $\partial\Delta_n$. Sul bordo di Δ_n vale anche

$$|z-z_0| \le \operatorname{diam}(\Delta_n) = d_n,$$

perche' $z_0 \in \Delta_n$. Pertanto, per ogni $z \in \partial\Delta_n$,

$$|(z-z_0)\varepsilon(z)| = |z-z_0|\,|\varepsilon(z)| \le d_n\eta.$$

Uguaglianza. Modulo del prodotto.
Disuguaglianza. Stime $|z-z_0| \le d_n$ e $|\varepsilon(z)| \le \eta$.

Usiamo ora la stima ML per gli integrali curvilinei. Applicata alla funzione

$$g(z) = (z-z_0)\varepsilon(z)$$

sul cammino $\partial\Delta_n$, di lunghezza L_n, essa dà

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} (z-z_0)\varepsilon(z)\,dz\right| \le L_n d_n \eta.$$

Usando (154), otteniamo

$$|I_n| \le L_n\,d_n\,\eta = \frac{L_0 d_0}{4^n}\eta.$$

Prima disuguaglianza. Formula (154) e stima ML.
Uguaglianza. Sostituzione di $L_n = L_0/2^n$ e $d_n = d_0/2^n$.

Confrontiamo questa stima con (153). Per n abbastanza grande,

$$\frac{|I_0|}{4^n} \le |I_n| \le \frac{L_0 d_0}{4^n}\eta.$$

Moltiplicando per 4^n, si ottiene
$$|I_0| \le L_0 d_0\, \eta.$$
Prima disuguaglianza. Uso congiunto di (153) e della stima appena ottenuta.

Poiche' $\eta > 0$ e' arbitrario, l'unica possibilita' e'
$$|I_0| = 0.$$
Infatti, se fosse $|I_0| > 0$, potremmo scegliere
$$0 < \eta < \frac{|I_0|}{L_0 d_0},$$
ottenendo una contraddizione con $|I_0| \le L_0 d_0\, \eta$. Quindi
$$I_0 = 0, \qquad \text{cioe'} \qquad \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che Ω sia aperto serve a dare senso all'olomorfia come proprieta' locale. Quando si usa la differenziabilita' complessa in z_0, serve infatti un intorno di z_0 contenuto in Ω, nel quale scrivere
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z).$$
Senza un aperto di definizione non si avrebbe questa informazione locale nel senso usuale dell'analisi complessa.

L'ipotesi che f sia olomorfa e' il cuore della dimostrazione. Viene usata solo alla fine, ma in modo decisivo: fornisce l'approssimazione lineare con errore infinitesimo. Senza olomorfia il risultato e' falso. Per esempio, se $f(z) = \overline{z}$ e Δ e' un triangolo chiuso orientato positivamente, allora usando la formula di Green si ottiene
$$\int_{\partial\Delta} \overline{z}\, dz = 2i\ \mathrm{Area}(\Delta),$$
che non e' nullo se il triangolo ha area positiva.

L'ipotesi $\Delta \subset \Omega$ serve a garantire che f sia definita e olomorfa su tutto il triangolo e sul suo bordo. Poiche' $z_0 \in \Delta \subset \Omega$ e Ω e' aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subset \Omega$. Inoltre i triangoli Δ_n hanno diametro tendente a zero e contengono z_0, quindi per n abbastanza grande si ha $\Delta_n \subset B(z_0, r)$. In questo modo lo sviluppo locale di f attorno a z_0 e' valido su tutto Δ_n. Se il triangolo attraversasse punti fuori da Ω, l'integrale lungo il bordo potrebbe non essere nemmeno definito.

La forma triangolare non e' una decorazione: la dimostrazione usa il fatto che un triangolo si divide naturalmente in quattro triangoli simili, con perimetro e diametro dimezzati a ogni passo. Per curve generali il teorema di Cauchy si ottiene con ulteriori argomenti di decomposizione o approssimazione, non con questa prova nella sua forma immediata.

L'orientazione positiva di $\partial\Delta$ fissa il verso del bordo. Per questo teorema, invertire l'orientazione cambierebbe solo il segno dell'integrale, quindi la conclusione resterebbe 0. Tuttavia fissare l'orientazione evita ambiguita' e rende coerente la cancellazione dei lati interni durante la suddivisione.

12.13.3 Teorema di Cauchy-Goursat per poligoni

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema per triangoli e' il risultato locale fondamentale. Il passo successivo consiste nel passare da un triangolo a un poligono: un poligono puo' essere diviso in un numero finito di triangoli, e su ciascuno di essi vale il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli.

L'idea e' la stessa gia' vista nella suddivisione del triangolo: quando si sommano gli integrali sui bordi dei triangoli, i lati interni compaiono due volte con orientazioni opposte e quindi si cancellano. Rimane soltanto il bordo esterno del poligono. Poiche' ogni integrale triangolare e' nullo, anche l'integrale sul bordo del poligono e' nullo.

Struttura della dimostrazione.

1. Triangolare il poligono P in un numero finito di triangoli chiusi $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$.
2. Applicare Cauchy-Goursat per triangoli a ogni Δ_k:
$$\int_{\partial \Delta_k} f(z)\, dz = 0.$$
3. Sommare le identita' ottenute.
4. Usare la cancellazione dei lati interni e ottenere l'integrale sul bordo esterno:
$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\partial \Delta_k} f(z)\, dz = \int_{\partial P} f(z)\, dz.$$

Prerequisiti. Servono il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli e il fatto geometrico che una regione poligonale chiusa semplice puo' essere triangolata mediante un numero finito di triangoli chiusi con interni disgiunti. Serve inoltre tenere traccia dell'orientazione: ogni lato interno viene percorso una volta in un verso e una volta nel verso opposto.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $P \subset \Omega$ e' una regione poligonale chiusa semplice, cioe' l'unione del suo interno e del suo bordo e' contenuta in Ω.
4. ∂P e' il bordo di P, orientato positivamente.

Tesi. Allora
$$\int_{\partial P} f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. Triangoliamo P in un numero finito di triangoli chiusi
$$\Delta_1, \ldots, \Delta_N$$
con interni a due a due disgiunti e contenuti in P. Poiche' $P \subset \Omega$, ogni triangolo Δ_k e' contenuto in Ω. Per il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli,
$$\int_{\partial \Delta_k} f(z)\, dz = 0, \qquad k = 1, \ldots, N.$$
Sommando rispetto a k, otteniamo
$$0 = \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial \Delta_k} f(z)\, dz.$$
Nella somma dei bordi, ogni lato interno viene percorso due volte con orientazioni opposte. I contributi dei lati interni si cancellano e resta solo il bordo esterno ∂P. Quindi
$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\partial \Delta_k} f(z)\, dz = \int_{\partial P} f(z)\, dz.$$
Uguaglianza. Cancellazione dei lati interni nella triangolazione.

Pertanto
$$\int_{\partial P} f(z)\, dz = 0.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che Ω sia aperto e che f sia olomorfa in Ω serve per poter applicare il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli a ogni Δ_k. Se f non fosse olomorfa, gia' il risultato triangolare potrebbe fallire.

L'ipotesi $P \subset \Omega$ serve a garantire che tutti i triangoli della triangolazione siano contenuti nel dominio di olomorfia di f. Se il poligono attraversasse punti fuori da Ω, alcuni integrali potrebbero non essere definiti oppure il teorema triangolare non sarebbe applicabile.

La semplicita' del poligono permette di parlare senza ambiguita' di interno, bordo e triangolazione del dominio racchiuso. Per poligoni con autointersezioni si puo' ancora ragionare, ma servono decomposizioni con segni o indici di avvolgimento.

L'orientazione positiva fissa il verso del bordo esterno e rende coerente la cancellazione dei lati interni. Se si invertisse l'orientazione, l'integrale cambierebbe segno, ma la conclusione resterebbe comunque 0.

12.13.4 Esistenza locale di primitive

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli permette di dimostrare che una funzione olomorfa possiede primitive locali. Questo e' il passaggio concettuale decisivo: una volta nota l'esistenza di una primitiva, l'integrale lungo una curva chiusa si annulla con il teorema fondamentale del calcolo lungo curve.

Il punto e' costruire direttamente la primitiva. In un disco D fissiamo un punto z_0 e definiamo

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Questa definizione usa il segmento da z_0 a z, che rimane dentro D perche' il disco e' convesso. Il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli serve a mostrare che l'incremento di F da z a $z+h$ e' esattamente l'integrale di f sul segmento $[z, z+h]$.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare $z_0 \in D$ e definire
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$
2. Usare Cauchy-Goursat sul triangolo di vertici $z_0, z, z+h$ per ottenere
$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$
3. Parametrizzare il segmento $[z, z+h]$ con $\zeta = z + th$, $0 \le t \le 1$.
4. Dividere per h e passare al limite usando la continuita' di f.

Prerequisiti. Servono il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli, la convessita' del disco e la definizione di derivata complessa. Serve inoltre il fatto elementare che una funzione olomorfa e' continua.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $D \subset \Omega$ e' un disco.

Tesi. Allora f ammette una primitiva in D, cioe' esiste $F : D \to \mathbb{C}$ tale che

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in D.$$

Dimostrazione. Fissiamo un punto $z_0 \in D$. Poiche' D e' convesso, per ogni $z \in D$ il segmento che unisce z_0 a z e' contenuto in D. Definiamo

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Mostriamo che $F'(z) = f(z)$. Siano $z \in D$ e $h \in \mathbb{C}$ abbastanza piccolo, con $h \neq 0$, in modo che $z + h \in D$ e che il triangolo chiuso di vertici $z_0, z, z + h$ sia contenuto in D. Questo e' possibile perche' D e' convesso. Il triangolo ha vertici

$$z_0, \qquad z, \qquad z + h$$

ed e' contenuto in D. Per il teorema di Cauchy-Goursat per triangoli,

$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Poiche'

$$\int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

la formula precedente diventa

$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Prima formula. Cauchy-Goursat applicato al triangolo $[z_0, z, z + h]$.
Seconda formula. Inversione dell'orientazione del segmento.
Terza formula. Sostituzione della seconda formula nella prima.

Ora usiamo la definizione di F:

$$F(z + h) = \int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta, \qquad F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Sostituendo queste due espressioni nella relazione precedente, otteniamo

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Dividendo per h, otteniamo

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Parametrizziamo il segmento con

$$\zeta = z + th, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Allora $d\zeta = h\, dt$, quindi

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z + th)\, dt.$$

Integrale. Sostituzione $\zeta = z + th$.

Facendo $h \to 0$, per la continuita' di f,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z)\, dt = f(z).$$

Quindi

$$F'(z) = f(z).$$

Dunque F e' una primitiva di f in D.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che D sia un disco serve per la convessita': i segmenti $[z_0, z]$, $[z, z+h]$ e il triangolo $[z_0, z, z+h]$ devono restare nel dominio in cui f e' olomorfa. In un aperto non convesso questa costruzione con i segmenti potrebbe uscire dal dominio.

L'olomorfia di f serve in due punti: permette di applicare Cauchy-Goursat al triangolo e garantisce la continuita' usata nel passaggio al limite.

12.13.5 Conseguenza: integrale nullo in presenza di una primitiva

Idea della dimostrazione e contesto. Questa e' la parte semplice della teoria. Se una funzione f e' la derivata di una funzione F, allora l'integrale di f lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva. In particolare, lungo una curva chiusa gli estremi coincidono e l'integrale e' nullo.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' continua.
3. f ammette una primitiva F in Ω, cioe' $F' = f$ in Ω.
4. $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e' una curva chiusa regolare a tratti.

Tesi. Allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dimostrazione. Per definizione di integrale curvilineo,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$
Poiche' $F' = f$, sui tratti in cui γ e' regolare si ha
$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{d}{dt}F(\gamma(t)).$$
Seconda uguaglianza. Regola della catena.

Quindi
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$
Poiche' γ e' chiusa, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Pertanto
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Ruolo delle ipotesi. L'esistenza della primitiva e' l'ipotesi decisiva: trasforma l'integrale di linea in una differenza di valori agli estremi. La chiusura di γ annulla questa differenza. La regolarita' a tratti serve per definire l'integrale e applicare la regola della catena tratto per tratto.

12.13.6 Esistenza globale di primitive nei domini semplicemente connessi

Idea della dimostrazione e contesto. L'esistenza locale di primitive non basta ancora per concludere il teorema globale: le primitive costruite su dischi diversi potrebbero non incollarsi in una primitiva unica su tutto il dominio. Il punto in cui entra la semplice connessione e' proprio questo: impedisce la comparsa di monodromia, cioe' di un cambiamento della primitiva quando la si continua lungo un cammino chiuso.

In modo equivalente, in un dominio semplicemente connesso l'integrale di una funzione olomorfa da z_0 a z non dipende dal cammino scelto. Questo permette di definire globalmente
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Prerequisiti. Servono l'esistenza locale di primitive e il fatto che due primitive della stessa funzione su un aperto connesso differiscono per una costante. Infatti, se $F_1' = f$ e $F_2' = f$, allora

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0,$$

quindi $F_1 - F_2$ e' costante su ogni componente connessa.

Su due dischi sovrapposti e con intersezione connessa, due primitive locali della stessa funzione differiscono per una costante. Per questo motivo si puo' sempre incollare una primitiva locale alla successiva lungo una catena di dischi: se sull'intersezione vale

$$F_1 - F_2 = c,$$

si sostituisce F_2 con $F_2 + c$, e le due primitive coincidono sull'intersezione.

Il problema non e' locale, ma globale. Se la catena di dischi forma un giro chiuso, dopo avere continuato la primitiva lungo tutto il giro potremmo tornare al disco iniziale con una primitiva diversa da quella di partenza per una costante non nulla:

$$F_{\text{finale}} = F_{\text{iniziale}} + c, \qquad c \neq 0.$$

Questo fenomeno si chiama monodromia. In presenza di monodromia non esiste una primitiva globale, perche' una funzione globale deve assegnare un solo valore a ogni punto.

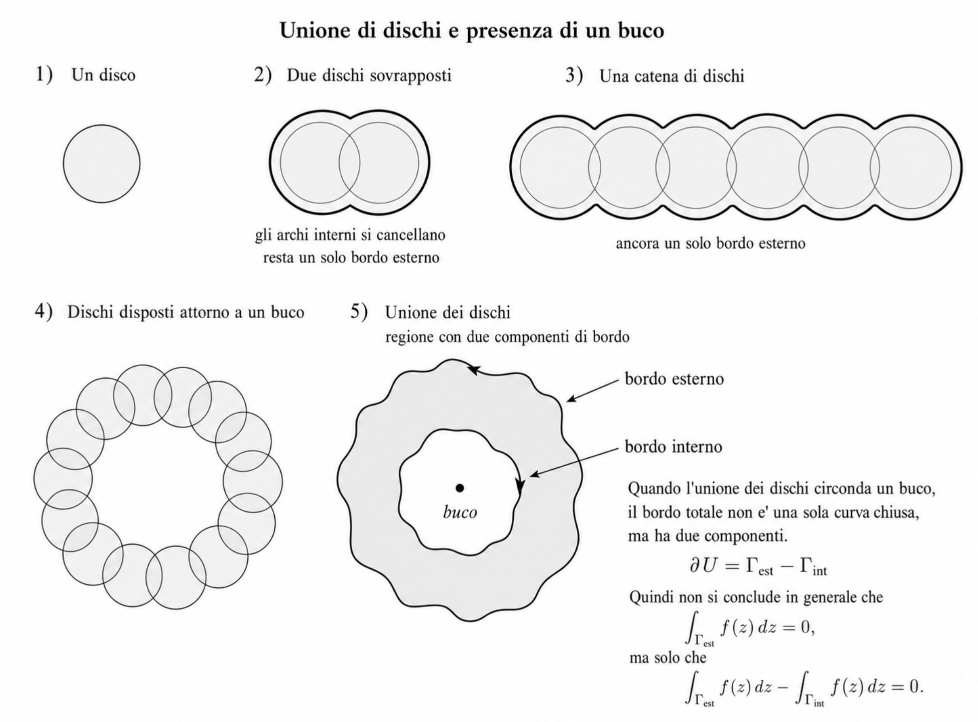

Figura 2: Unione di dischi locali e presenza di un buco: lungo ogni sovrapposizione l'incollamento delle primitive e' possibile, ma un giro completo attorno al buco puo' produrre monodromia.

La figura 2 rappresenta il punto delicato: ogni disco e ogni sovrapposizione descrivono un problema locale, mentre il buco e' un ostacolo globale. La semplice connessione serve proprio a escludere questo tipo di ostacolo.

Esempio: $1/z$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

e' olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ha primitive locali, date dai rami locali del logaritmo. Infatti, in un piccolo disco che non contiene 0, si puo' scegliere un ramo di $\log z$, e si ha

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

Tuttavia non esiste una primitiva globale in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se esistesse, ogni integrale lungo un cammino chiuso dovrebbe essere nullo. Ma sulla circonferenza unitaria $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

Quindi la primitiva globale non puo' esistere. In termini di logaritmo, dopo un giro completo attorno all'origine l'argomento aumenta di 2π, e il logaritmo cambia di $2\pi i$.

La semplice connessione elimina questo ostacolo: ogni cammino chiuso puo' essere contratto a un punto restando nel dominio. Di conseguenza, la continuazione di una primitiva locale lungo un cammino chiuso non puo' produrre una costante diversa da zero. Le primitive locali risultano quindi incollabili in una primitiva globale.

Principio di incollamento delle primitive locali. Assumiamo il seguente risultato topologico-analitico: se Ω e' semplicemente connesso e f ammette primitive locali in Ω, allora queste primitive locali si possono incollare in una primitiva globale. La dimostrazione rigorosa di questo principio richiede un argomento di continuazione lungo cammini e di assenza di monodromia; in questa dispensa lo usiamo come ponte tra il risultato locale e il teorema globale.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un dominio semplicemente connesso.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.

Tesi. Allora f ammette una primitiva globale in Ω.

Dimostrazione. Per l'esistenza locale di primitive, ogni punto di Ω possiede un disco $D \subset \Omega$ su cui f ammette una primitiva locale. Applicando il principio di incollamento delle primitive locali in un dominio semplicemente connesso, queste primitive locali si incollano in una funzione

$$F : \Omega \to \mathbb{C}$$

tale che

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Dunque F e' una primitiva globale di f in Ω.

Ruolo delle ipotesi. L'apertura di Ω serve per avere dischi locali contenuti nel dominio. L'olomorfia serve per ottenere primitive locali. La semplice connessione serve per passare dal locale al globale: elimina la monodromia e garantisce che la continuazione delle primitive locali lungo cammini chiusi torni al valore di partenza. Se manca, una funzione puo' avere primitive locali ma non una primitiva globale, come accade per $1/z$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

12.13.7 Teorema di Cauchy per curve chiuse

Idea della dimostrazione e contesto. Ora il teorema generale diventa una conseguenza immediata. In un dominio semplicemente connesso, una funzione olomorfa ha una primitiva globale. Ma se una funzione ha una primitiva globale, allora il suo integrale lungo ogni curva chiusa e' nullo.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un dominio semplicemente connesso.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $\gamma \subset \Omega$ e' una curva chiusa regolare a tratti.

Tesi. Allora

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. Poiche' Ω e' semplicemente connesso e f e' olomorfa in Ω, il risultato precedente garantisce che f ammette una primitiva globale F in Ω. Applicando la conseguenza precedente alla curva chiusa γ, otteniamo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Ruolo delle ipotesi. La semplice connessione e' l'ipotesi globale che permette di passare dalle primitive locali a una primitiva globale. Senza questa ipotesi il risultato puo' fallire: in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la funzione $f(z) = 1/z$ e' olomorfa, ma sulla circonferenza unitaria $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

L'olomorfia serve per ottenere primitive locali, mentre la regolarita' a tratti di γ serve per definire correttamente l'integrale curvilineo.

12.14 Formula integrale di Cauchy

Idea della dimostrazione e contesto. La formula integrale di Cauchy e' uno dei risultati piu' importanti dell'analisi complessa. Essa afferma che il valore di una funzione olomorfa in un punto interno a un disco e' completamente determinato dai valori della funzione sul bordo del disco:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Questa formula e' molto piu' forte di un semplice teorema di annullamento degli integrali. Il teorema di Cauchy-Goursat dice che, sotto opportune ipotesi geometriche sulla curva e sul dominio interno, l'integrale di una funzione olomorfa lungo una curva chiusa e' nullo; la formula integrale di Cauchy mostra invece che, introducendo il nucleo

$$\frac{1}{z - z_0},$$

l'integrale sul bordo recupera esattamente il valore della funzione nel punto z_0.

Il punto concettuale e' questo: la funzione

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

ha una singolarita' in z_0. Separiamo allora la parte davvero singolare dalla parte regolare:

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) + f(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0) + \big(f(z) - f(z_0)\big)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Il secondo termine e' in realta' innocuo, perche' l'olomorfia di f fa si' che il quoziente abbia limite finito in z_0. Il primo termine, invece, e' quello che produce il fattore $2\pi i$.

Questa formula e' il ponte verso i risultati successivi: formula integrale per le derivate, analiticita' delle funzioni olomorfe, stime di Cauchy, teorema di Liouville e teorema dei residui.

In questa prima dimostrazione consideriamo la versione per dischi centrati nel punto z_0. La formula vale anche in forme piu' generali, ma questa scelta permette di calcolare direttamente l'integrale fondamentale

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\,dz.$$

Struttura della dimostrazione.

1. Sommare e sottrarre $f(z_0)$ al numeratore:

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) + f(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0) + \big(f(z) - f(z_0)\big)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

2. Integrare sul bordo e ottenere

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

3. Studiare il secondo integrale introducendo

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

4. Applicare Cauchy-Goursat a un anello tagliato e poi la stima ML sul cerchio piccolo per mostrare che

$$\int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

5. Calcolare direttamente

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i.$$

6. Concludere che

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0).$$

Prerequisiti. Servono il teorema di Cauchy-Goursat e il fatto che una funzione olomorfa e' continua e derivabile in senso complesso. Useremo in particolare questo passaggio:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

che implica che il quoziente e' limitato in un intorno bucato di z_0.

Serve inoltre una forma elementare del teorema di Cauchy-Goursat su un anello. Se una funzione h e' olomorfa nell'anello compreso tra due circonferenze concentriche, allora l'integrale sul bordo esterno orientato positivamente coincide con l'integrale sul bordo interno orientato positivamente rispetto al suo centro:

$$\int_{\partial D} h(z)\, dz = \int_{C_\rho} h(z)\, dz.$$

Infatti, come bordo positivo dell'anello, la circonferenza interna viene percorsa in verso negativo; quindi da Cauchy-Goursat si ottiene

$$\int_{\partial D} h(z)\, dz - \int_{C_\rho} h(z)\, dz = 0.$$

Per giustificare l'applicazione di Cauchy-Goursat si taglia l'anello lungo un raggio: il dominio tagliato e' semplicemente connesso, e i due lati del taglio vengono percorsi in versi opposti, quindi i loro contributi si cancellano.

Infine, serve il calcolo dell'integrale fondamentale sul bordo di un disco: se

$$\partial D: \quad z = z_0 + Re^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

allora

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $z_0 \in \Omega$.
4. $$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \qquad R > 0,$$
   e' un disco centrato in z_0 tale che
   $$\overline{D} \subset \Omega.$$
5. ∂D e' orientato positivamente.

Tesi. Allora
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Dimostrazione. Partiamo dall'integrale che vogliamo calcolare. Sommiamo e sottraiamo $f(z_0)$ al numeratore:
$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z) + f(z_0) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0) + \big(f(z) - f(z_0)\big)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
Integrando sul bordo ∂D, otteniamo
$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{155}$$
Prima uguaglianza. Somma e sottrazione di $f(z_0)$ al numeratore.
Seconda uguaglianza. Riscrittura
$$f(z) + f(z_0) - f(z_0) = f(z_0) + \big(f(z) - f(z_0)\big).$$
Formula integrale. Separazione dell'integrale nella parte singolare e nella parte regolare.

Ora dimostriamo che il secondo integrale e' nullo. Consideriamo, per $z \neq z_0$, la funzione
$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$
Nel disco bucato $D \backslash \{z_0\}$, la funzione g e' olomorfa perche' e' quoziente di funzioni olomorfe con denominatore non nullo. Inoltre, per definizione di derivata complessa,
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$
Quindi g e' limitata in un intorno bucato di z_0: esistono $\delta > 0$ e $M > 0$ tali che
$$|g(z)| \le M \qquad \text{se } 0 < |z - z_0| < \delta.$$
Prima formula. Definizione di derivata complessa in z_0.
Seconda formula. Una funzione che ammette limite finito in un punto e' limitata in un intorno sufficientemente piccolo del punto.
Osservazione. In linguaggio piu' avanzato, z_0 e' una singolarita' eliminabile per g. Qui pero' non usiamo il teorema delle singolarita' eliminabili: ci basta sapere che g e' limitata vicino a z_0.

Fissiamo $0 < \rho < \min\{R, \delta\}$ e indichiamo con
$$C_\rho : \quad |z - z_0| = \rho$$

la circonferenza centrata in z_0, orientata positivamente. La funzione g e' olomorfa nell'anello

$$A_\rho = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z - z_0| < R\}.$$

Tagliando l'anello lungo un raggio e applicando Cauchy-Goursat al dominio tagliato, i contributi dei due lati del taglio si cancellano e rimane

$$\int_{\partial D} g(z)\, dz - \int_{C_\rho} g(z)\, dz = 0.$$

Formula. Il bordo positivo dell'anello e' dato dal bordo esterno ∂D orientato positivamente e dal bordo interno orientato negativamente; per questo compare il segno meno davanti all'integrale su C_ρ, che qui e' scritto con orientazione positiva attorno a z_0.

Quindi

$$\int_{\partial D} g(z)\, dz = \int_{C_\rho} g(z)\, dz.$$

Stimiamo il secondo integrale. Poiche' $|g(z)| \leq M$ su C_ρ e la lunghezza di C_ρ e' $2\pi\rho$, dalla stima ML otteniamo

$$\left| \int_{C_\rho} g(z)\, dz \right| \leq 2\pi\rho M.$$

Facendo $\rho \to 0$, segue che

$$\int_{\partial D} g(z)\, dz = 0.$$

Cioe'

$$\int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Conclusione. L'integrale sul bordo esterno coincide con quello su un cerchio arbitrariamente piccolo attorno a z_0, ma quest'ultimo tende a zero per la stima ML.

Sostituendo questo risultato nella decomposizione iniziale (155), rimane

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Calcoliamo l'integrale fondamentale parametrizzando il bordo del disco:

$$z = z_0 + Re^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Allora

$$dz = iRe^{it}\, dt, \qquad z - z_0 = Re^{it}.$$

Pertanto

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

Prima uguaglianza. Parametrizzazione positiva del bordo ∂D.
Seconda uguaglianza. Sostituzioni $z - z_0 = Re^{it}$ e $dz = iRe^{it}\, dt$.

Quindi

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i\, f(z_0).$$

Dividendo per $2\pi i$, otteniamo

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $\overline{D} \subset \Omega$ garantisce che f sia olomorfa non solo nel disco, ma anche in un intorno del bordo. Questo permette di integrare su ∂D e di applicare Cauchy-Goursat alla funzione ausiliaria

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se il disco incontrasse punti fuori da Ω, il bordo potrebbe passare dove f non e' definita oppure racchiudere singolarita' non controllate.

L'olomorfia di f e' l'ipotesi decisiva. Serve per due ragioni: garantisce che il quoziente

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

abbia limite finito in z_0, e permette di applicare Cauchy-Goursat alla funzione g negli anelli bucati attorno a z_0. Se f non e' olomorfa, la formula puo' fallire. Per esempio, nel disco unitario, prendiamo

$$f(z) = |z|^2, \qquad z_0 = 0.$$

Allora $f(0) = 0$, ma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{|z|^2}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\, ie^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i\, dt = 1.$$

Quindi il membro destro della formula darebbe 1, mentre $f(0) = 0$. Il problema non e' che f sia discontinua: infatti $f(z) = |z|^2$ e' continua. Il problema e' che non e' olomorfa.

L'orientazione positiva di ∂D fissa il segno del coefficiente. Con orientazione negativa si avrebbe

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz = -2\pi i,$$

e quindi la formula avrebbe il segno opposto.

Infine, il fatto che z_0 sia il centro del disco non e' essenziale per il fenomeno, ma rende questa prima dimostrazione piu' pulita: il calcolo di

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

diventa immediato tramite la parametrizzazione $z = z_0 + Re^{it}$. Versioni piu' generali della formula valgono anche per curve chiuse semplici che racchiudono z_0, ma richiedono di controllare l'indice della curva rispetto al punto.

12.14.1 Corollario: formula integrale per punti interni al disco

Idea della dimostrazione e contesto. La formula appena dimostrata ricostruisce f al centro del disco. Questo corollario dice che il centro non e' speciale: lo stesso bordo ∂D ricostruisce $f(w)$ per ogni punto interno $w \in D$. Servira' subito nella formula per le derivate, dove w deve restare variabile mentre il bordo rimane fisso.

Struttura della dimostrazione.

1. Scegliere un piccolo disco centrato in w e contenuto in D.
2. Applicare la formula integrale di Cauchy centrata al piccolo disco.
3. Spostare l'integrale dal bordo piccolo al bordo grande usando Cauchy-Goursat nella regione compresa tra i due bordi.

Prerequisiti. Servono la formula integrale di Cauchy nella versione centrata e il seguente fatto: se h e' olomorfa nella regione compresa tra un bordo esterno Γ_1 e un bordo interno Γ_2, allora

$$\int_{\Gamma_1} h(z)\, dz = \int_{\Gamma_2} h(z)\, dz,$$

dove entrambe le curve sono orientate positivamente rispetto al loro interno. Il motivo e' che, come bordo della regione bucata, il bordo interno compare con orientazione negativa. Infatti il bordo positivo della regione bucata e'

$$\Gamma_1 - \Gamma_2.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}, \qquad R > 0,$$
   e' un disco tale che
   $$\overline{D} \subset \Omega.$$
4. $w \in D$.
5. ∂D e' orientato positivamente.

Tesi. Allora
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$

Dimostrazione. Poiche' $w \in D$, esiste $\rho > 0$ tale che
$$\overline{B(w, \rho)} \subset D.$$

Indichiamo con
$$C_\rho = \partial B(w, \rho)$$
la circonferenza centrata in w, orientata positivamente. Applicando la formula integrale di Cauchy nella versione centrata al disco $B(w, \rho)$, otteniamo
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$
Formula. Il punto w e' il centro del piccolo disco $B(w, \rho)$, quindi stiamo usando la formula gia' dimostrata.

Ora consideriamo
$$h(z) = \frac{f(z)}{z - w}.$$
La funzione h e' olomorfa nella regione
$$D \setminus \overline{B(w, \rho)},$$
perche' f e' olomorfa in D e, in questa regione, $z - w \neq 0$. Il bordo positivo della regione bucata e' formato da ∂D orientato positivamente e da C_ρ orientato negativamente. Per Cauchy-Goursat,
$$\int_{\partial D} h(z)\, dz - \int_{C_\rho} h(z)\, dz = 0.$$
Quindi
$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$
Segno. Il bordo interno della regione bucata e' percorso con orientazione negativa; per questo compare il segno meno davanti all'integrale su C_ρ, che qui e' scritto con orientazione positiva.

Sostituendo questa uguaglianza nella formula ottenuta sul piccolo disco, ricaviamo
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $\overline{D} \subset \Omega$ garantisce che f sia olomorfa sul disco grande e sul piccolo disco centrato in w. L'ipotesi $w \in D$ permette di scegliere $\rho > 0$ tale che
$$\overline{B(w, \rho)} \subset D.$$
L'olomorfia di f serve per applicare la formula centrata e Cauchy-Goursat alla regione bucata. Infine, l'orientazione positiva fissa il segno del fattore $2\pi i$.

Osservazione. Questo corollario sara' usato nella formula integrale di Cauchy per le derivate: li' w varia dentro il disco, mentre ∂D resta fisso.

12.15 Formula integrale di Cauchy per le derivate

Idea della dimostrazione e contesto. La formula integrale di Cauchy permette di ricostruire il valore di una funzione olomorfa in un punto usando i valori della funzione sul bordo di un disco. La formula integrale per le derivate spinge questa idea molto piu' lontano: anche tutte le derivate di f in un punto sono determinate dai valori di f sul bordo.

Il risultato afferma che

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Questa formula e' uno dei punti in cui si vede la rigidita' dell'analisi complessa: in analisi reale una funzione derivabile una volta non deve essere derivabile infinite volte; in analisi complessa, invece, l'olomorfia forza l'esistenza di tutte le derivate.

L'idea della dimostrazione e' trasformare il nucleo della formula integrale di Cauchy in una serie geometrica. Per $z \in \partial D$ e w vicino a z_0, si scrive

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}.$$

Poiche' sul bordo $|z-z_0| = R$, se $|w-z_0| < R$ il rapporto

$$\frac{w-z_0}{z-z_0}$$

ha modulo minore di 1. Possiamo quindi usare la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

In questo modo $f(w)$ viene scritto come una serie di potenze in $w-z_0$, e i coefficienti della serie sono proprio gli integrali che compaiono nella formula.

Struttura della dimostrazione.

1. Usare la formula integrale di Cauchy nella forma
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz, \qquad |w-z_0| < R.$$
2. Riscrivere il nucleo:
$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}.$$
3. Sviluppare il secondo fattore in serie geometrica:
$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$
4. Integrare termine a termine:
$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right] (w-z_0)^n.$$
5. Confrontare con la forma generale di una serie di potenze e leggere il coefficiente:
$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Prerequisiti. Serve il corollario della formula integrale di Cauchy per punti interni al disco: se $w \in D$, allora

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w} \, dz.$$

Servono inoltre la serie geometrica e il fatto che una serie di funzioni uniformemente convergente su una curva puo' essere integrata termine a termine. Qui useremo la serie geometrica nella forma

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \qquad |q| < 1.$$

La convergenza uniforme sul bordo sara' garantita fissando un raggio $0 < r < R$ e considerando solo punti w tali che

$$|w - z_0| \leq r.$$

Infatti, per $z \in \partial D$,

$$\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| \leq \frac{r}{R} < 1.$$

Serve inoltre il fatto elementare sulle serie di potenze: se

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n$$

in un intorno di z_0, allora

$$f^{(n)}(z_0) = n! \, a_n.$$

Infatti, una serie di potenze puo' essere derivata termine a termine dentro il suo raggio di convergenza. Derivando k volte, si ottiene

$$f^{(k)}(w) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (w - z_0)^{n-k}.$$

Ponendo $w = z_0$, tutti i termini con $n > k$ si annullano e resta solo il termine $n = k$:

$$f^{(k)}(z_0) = k! \, a_k.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $z_0 \in \Omega$.
4. $$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \qquad R > 0,$$
   e' un disco centrato in z_0 tale che
   $$\overline{D} \subset \Omega.$$
5. ∂D e' orientato positivamente.

Tesi. Allora f ammette derivate di ogni ordine in z_0 e, per ogni intero $n \geq 0$, vale

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz.$$

Dimostrazione. Per il corollario della formula integrale di Cauchy per punti interni al disco, per ogni $w \in D$ si ha

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}\, dz.$$

Fissiamo ora $0 < r < R$ e consideriamo w tale che

$$|w - z_0| \le r.$$

Per $z \in \partial D$, cioe' per $|z - z_0| = R$, scriviamo

$$z - w = (z - z_0) - (w - z_0) = (z - z_0)\left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}\right).$$

Quindi

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}}.$$

Prima uguaglianza. Somma e sottrazione di z_0.
Seconda uguaglianza. Raccolta del fattore $z - z_0$.

Poiche'

$$\left|\frac{w - z_0}{z - z_0}\right| \le \frac{r}{R} < 1,$$

possiamo usare la serie geometrica:

$$\frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^n.$$

Pertanto

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Convergenza. La convergenza e' uniforme per $z \in \partial D$ e $|w - z_0| \le r$, perche' e' dominata dalla serie geometrica di ragione $r/R < 1$.

Sostituiamo questo sviluppo nella formula integrale:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Poiche' f e' continua su ∂D, essa e' limitata su ∂D: esiste $M_f > 0$ tale che

$$|f(z)| \le M_f \qquad \text{per ogni } z \in \partial D.$$

La serie precedente converge uniformemente per $z \in \partial D$ e $|w - z_0| \le r$. Quindi anche la serie

$$f(z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

converge uniformemente sul bordo. Possiamo dunque integrare termine a termine:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\right] (w - z_0)^n. \tag{156}$$

Formula (156). Abbiamo scritto f come serie di potenze centrata in z_0.

Poniamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Allora la formula (156) diventa

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n.$$

Poiche' $r < R$ e' arbitrario, questa rappresentazione vale per ogni $w \in D$. In particolare, f e' sviluppabile in serie di potenze centrata in z_0.

Per la proprieta' fondamentale delle serie di potenze,

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n.$$

Sostituendo l'espressione di a_n, otteniamo

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $\overline{D} \subset \Omega$ garantisce che f sia olomorfa in un intorno del disco chiuso. Questo serve sia per applicare la formula integrale di Cauchy ai punti interni del disco, sia per integrare sul bordo ∂D. Se il bordo attraversasse punti fuori da Ω, gli integrali potrebbero non essere definiti.

L'olomorfia di f e' l'ipotesi decisiva: permette di usare la formula integrale di Cauchy. Tutto il resto della dimostrazione e' poi una conseguenza analitica dello sviluppo del nucleo $\frac{1}{z-w}$ in serie geometrica. In particolare, la dimostrazione mostra non solo che le derivate esistono, ma anche che f coincide localmente con una serie di potenze. Senza olomorfia non esiste in generale nessuna ragione per cui i valori sul bordo determinino le derivate interne.

Il fatto che D sia centrato in z_0 rende semplice la scrittura

$$|z - z_0| = R \qquad \text{per } z \in \partial D,$$

e quindi rende immediata la stima

$$\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| \le \frac{r}{R} < 1.$$

La formula ha versioni piu' generali, ma questa forma e' quella piu' adatta per vedere il legame diretto tra formula integrale, serie geometrica e derivate.

L'orientazione positiva di ∂D fissa il segno del coefficiente $2\pi i$. Con orientazione negativa tutti gli integrali cambierebbero segno, e la formula avrebbe il segno opposto.

Osservazione. Per $n = 0$ la formula coincide con la formula integrale di Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Per $n \ge 1$, invece, essa fornisce le derivate successive di f in z_0.

12.16 Stime di Cauchy

Idea della dimostrazione e contesto. Le stime di Cauchy trasformano la formula integrale per le derivate in una disuguaglianza. Nella forma piu' immediata, una derivata interna $f^{(n)}(z_0)$ viene controllata usando il massimo di $|f|$ sul bordo del disco.

Questo pero' va interpretato con attenzione. Per $n \ge 1$, se aggiungiamo a f una costante arbitraria, le derivate non cambiano:

$$(f + c)^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0).$$

Quindi le stime di Cauchy non legano veramente le derivate all'altezza assoluta di f rispetto allo zero, ma all'oscillazione dei valori di f sul bordo. Infatti, applicando la stima a $f - c$, si ottiene

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n} \max_{z \in \partial D} |f(z) - c|, \qquad n \ge 1,$$

per ogni $c \in \mathbb{C}$. Nel caso reale, scegliere c a meta' tra il valore massimo e il valore minimo porta esattamente alla semidifferenza tra il punto piu' alto e il punto piu' basso. Nel caso complesso, l'analogo geometrico e' il raggio di un disco che contenga tutti i valori di f sul bordo.

La forma standard resta comunque

$$\max_{|z-z_0|=R} |f(z)|,$$

perche' e' la piu' semplice da usare. Essa collega un'informazione sul bordo con un'informazione locale nel centro,

$$|f^{(n)}(z_0)|.$$

Sara' il passaggio naturale verso il teorema di Liouville: se una funzione olomorfa e' limitata su tutto il piano, le stime di Cauchy forzano la sua derivata a essere nulla.

Struttura della dimostrazione.

1. Partire dalla formula integrale di Cauchy per le derivate:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz.$$

2. Prendere il modulo e applicare la stima ML.
3. Usare che, su ∂D,

$$|z - z_0| = R.$$

4. Semplificare la lunghezza del bordo, cioe'

$$L(\partial D) = 2\pi R.$$

Prerequisiti. Servono la formula integrale di Cauchy per le derivate e la stima ML: se g e' continua su una curva γ regolare a tratti, allora

$$\left| \int_\gamma g(z)\, dz \right| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma} |g(z)|.$$

Useremo anche il fatto che, essendo f continua sul compatto ∂D, il massimo

$$M_R = \max_{z\in\partial D} |f(z)|$$

esiste.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' olomorfa in Ω.
3. $z_0 \in \Omega$.
4. $$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}, \qquad R > 0,$$

   e' un disco centrato in z_0 tale che

$$\overline{D} \subset \Omega.$$

5. ∂D e' orientato positivamente, come nella formula integrale di Cauchy per le derivate.

Tesi. Allora, per ogni intero $n \ge 0$, vale

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n} \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

Dimostrazione. Poniamo
$$M_R = \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$
Questo massimo esiste per continuita' di f e compattezza di ∂D.

Per la formula integrale di Cauchy per le derivate,
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$
Prendendo il modulo, otteniamo
$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right|.$$
Prima uguaglianza. Formula integrale di Cauchy per le derivate.
Seconda uguaglianza. $|i| = 1$, quindi
$$\left|\frac{1}{2\pi i}\right| = \frac{1}{2\pi}.$$

Applichiamo ora la stima ML alla funzione
$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$
sulla curva ∂D. Si ha
$$\left|\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \le L(\partial D)\max_{z\in\partial D}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right|.$$
Poiche' su ∂D vale $|z-z_0| = R$, segue
$$\max_{z\in\partial D}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{R^{n+1}}\max_{z\in\partial D}|f(z)| = \frac{M_R}{R^{n+1}}.$$
Prima uguaglianza. Sul bordo del disco la distanza dal centro e' costante ed e' uguale a R.
Seconda uguaglianza. Definizione di M_R.

Inoltre
$$L(\partial D) = 2\pi R.$$
Quindi
$$\left|\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \le 2\pi R\frac{M_R}{R^{n+1}} = \frac{2\pi M_R}{R^n}.$$
Sostituendo questa stima nella formula per $|f^{(n)}(z_0)|$, otteniamo
$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{2\pi M_R}{R^n} = \frac{n!}{R^n}M_R.$$
Cioe'
$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n}\max_{z\in\partial D}|f(z)|.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $\overline{D}\subset\Omega$ consente di applicare la formula integrale di Cauchy per le derivate sul bordo ∂D. Se il bordo non fosse contenuto nel dominio di olomorfia, l'integrale potrebbe non essere definito.

L'olomorfia di f e' decisiva perche' e' cio' che permette di usare la formula per le derivate. La stima ML, da sola, non produce nessuna informazione sulle derivate: serve prima una rappresentazione integrale di $f^{(n)}(z_0)$.

Il fatto che D sia un disco centrato in z_0 rende la stima esplicita, perche' sul bordo vale $|z-z_0| = R$. Questa e' la ragione per cui compare il fattore R^n al denominatore.

L'orientazione positiva non incide sul valore assoluto finale, ma e' coerente con la formula integrale per le derivate da cui partiamo. Cambiare orientazione cambierebbe il segno dell'integrale, ma non la stima del modulo.

Osservazione. Per $n = 0$ la stima diventa

$$|f(z_0)| \leq \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

Questa anticipa una forma debole del principio del massimo: il valore al centro di un disco non puo' superare il massimo assunto sul bordo.

Per $n = 1$, invece, si ottiene

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \max_{z\in\partial D} |f(z)|.$$

Questa e' la stima che useremo nel teorema di Liouville.

12.17 Le funzioni olomorfe sono analitiche

Idea della dimostrazione e contesto. La formula integrale di Cauchy per le derivate non controlla solo i valori di f e delle sue derivate in un punto: mostra anche che f coincide, in un intorno del punto, con una serie di potenze. Questo e' il significato preciso del fatto che una funzione olomorfa e' analitica.

In altri termini, l'olomorfia non produce soltanto regolarita' infinitesimale, ma una struttura locale completamente rigida: vicino a ogni punto, la funzione e' gia' determinata dal suo sviluppo di Taylor.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un punto $z_0 \in \Omega$ e un disco chiuso contenuto in Ω.
2. Applicare la formula integrale di Cauchy a $f(w)$.
3. Sviluppare il nucleo $\frac{1}{z-w}$ in serie geometrica.
4. Integrare termine a termine.
5. Riconoscere i coefficienti tramite la formula integrale di Cauchy per le derivate.
6. Concludere che f e' analitica in z_0, e quindi in tutto Ω.

Prerequisiti. Serve la formula integrale di Cauchy: se f e' olomorfa in un intorno del disco chiuso $\overline{D}$, allora, per ogni $w \in D$,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$

Serve inoltre la formula integrale di Cauchy per le derivate: se f e' olomorfa in un intorno del disco chiuso $\overline{D} \subset \Omega$, allora

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Serve inoltre la definizione di funzione analitica: una funzione e' analitica in un punto se coincide, in un intorno di quel punto, con una serie di potenze convergente.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω.
3. $z_0 \in \Omega$.

Tesi. Allora f e' analitica in z_0. In particolare, esiste un raggio $R > 0$ tale che, per ogni w con $|w - z_0| < R$,

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w - z_0)^n$$

per opportuni coefficienti a_n.

Dimostrazione. Poiche' Ω e' aperto e $z_0 \in \Omega$, esiste un disco

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

tale che $\overline{D} \subset \Omega$.

Fissiamo w con $|w - z_0| < R$. Per la formula integrale di Cauchy (Sezione 12.14) abbiamo

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w}\, dz.$$

Per $z \in \partial D$, cioe' per $|z - z_0| = R$, vale

$$\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|w - z_0|}{R} < 1.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{(z - z_0) - (w - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}}.$$

Usando la serie geometrica,

$$\frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

e dunque

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

La convergenza e' uniforme su ∂D, perche' il rapporto ha modulo strettamente minore di 1. Possiamo quindi integrare termine a termine:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Quindi

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \right) (w - z_0)^n. \tag{157}$$

Formula (157). Abbiamo scritto f come serie di potenze centrata in z_0.

Per la formula integrale di Cauchy per le derivate (Sezione 12.15), si ha

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Quindi il coefficiente tra parentesi e'

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Sostituendo in (157), otteniamo

$$f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (w - z_0)^n.$$

Quindi f coincide in un intorno di z_0 con la sua serie di Taylor, cioe' f e' analitica in z_0.

Poiche' z_0 e' arbitrario, f e' analitica in ogni punto di Ω.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che Ω sia aperto serve per poter scegliere, attorno a ogni punto z_0, un disco chiuso contenuto nel dominio.

L'olomorfia di f e' l'ipotesi decisiva: solo con essa la formula integrale per le derivate fornisce la rappresentazione in serie di potenze.

L'apertura del disco attorno a z_0 e' cio' che rende locale il risultato: non stiamo costruendo una serie globale, ma uno sviluppo valido in un intorno del punto.

Osservazione. Insieme al teorema gia' dimostrato nella Sezione 12.8, secondo cui ogni serie di potenze converge a una funzione olomorfa nel suo disco di convergenza, questo risultato completa l'equivalenza fondamentale:

$$\text{funzione olomorfa} \iff \text{sviluppo locale in serie di potenze.}$$

12.18 Ordine di uno zero

Idea della dimostrazione e contesto. Per una funzione olomorfa, uno zero non e' solo un punto in cui la funzione si annulla. Grazie allo sviluppo di Taylor, si puo' misurare con quale ordine la funzione si annulla. Se il primo termine non nullo dello sviluppo e' quello di grado m, allora vicino a z_0 la funzione contiene il fattore

$$(z - z_0)^m.$$

Questo numero m si chiama ordine dello zero.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor di f in z_0.
2. Individuare il primo coefficiente non nullo.
3. Raccogliere la potenza $(z - z_0)^m$.
4. Definire la funzione residua g e verificare che e' olomorfa e non nulla in z_0.

Prerequisiti. Serve il fatto che una funzione olomorfa e' analitica, dimostrato nella Sezione 12.17. Useremo quindi lo sviluppo di Taylor locale:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. $z_0 \in \Omega$;
4. $f(z_0) = 0$;
5. f non sia identicamente nulla in un intorno di z_0.

Tesi. Allora esiste un unico intero $m \geq 1$ ed esiste una funzione g olomorfa in un intorno di z_0, con $g(z_0) \neq 0$, tali che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

Il numero m si chiama *ordine dello zero* di f in z_0.

Dimostrazione. Poiche' f e' olomorfa, e' analitica in z_0. Quindi, in un intorno di z_0, possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Poiche' $f(z_0) = 0$, si ha

$$a_0 = 0.$$

Poiche' f non e' identicamente nulla in un intorno di z_0, non tutti i coefficienti a_n sono nulli. Esiste quindi un primo indice $m \geq 1$ tale che

$$a_m \neq 0, \qquad a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0.$$

Allora

$$f(z)=\sum_{n=m}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=(z-z_0)^m\sum_{j=0}^{+\infty}a_{m+j}(z-z_0)^j.$$

Definiamo

$$g(z)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_{m+j}(z-z_0)^j.$$

Questa e' una serie di potenze, quindi g e' olomorfa in un intorno di z_0. Inoltre

$$g(z_0)=a_m\neq 0.$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\qquad g(z_0)\neq 0.$$

Resta da osservare che m e' unico. Infatti, se

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)=(z-z_0)^\ell h(z),$$

con $g(z_0)\neq 0$ e $h(z_0)\neq 0$, allora lo sviluppo di Taylor di f ha primo termine non nullo di grado m nella prima rappresentazione e di grado ℓ nella seconda. Per unicita' dello sviluppo di Taylor, deve essere

$$m=\ell.$$

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia serve per poter usare lo sviluppo di Taylor. Senza analiticita', non avrebbe senso leggere l'ordine dello zero dai coefficienti di una serie di potenze.

L'ipotesi $f(z_0)=0$ garantisce che il primo coefficiente dello sviluppo sia nullo, quindi che l'ordine sia almeno 1.

L'ipotesi che f non sia identicamente nulla in un intorno di z_0 serve per assicurare l'esistenza di un primo coefficiente non nullo. Se tutti i coefficienti fossero nulli, non ci sarebbe un ordine finito dello zero.

Osservazione. L'ordine di uno zero e' l'analogo locale della molteplicita' di una radice di un polinomio. Questa nozione sara' usata per dimostrare che gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati.

12.19 Zeri isolati

Idea della dimostrazione e contesto. Uno zero di una funzione olomorfa e' isolato se, localmente, la funzione non e' identicamente nulla. Questo e' uno dei primi segnali della rigidita' delle funzioni olomorfe: se gli zeri si accumulano, allora il comportamento locale non puo' essere quello di una funzione non nulla.

L'idea e' usare l'ordine dello zero. Se $f(z_0)=0$, allora localmente

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\qquad g(z_0)\neq 0.$$

Poiche' g e' continua e non si annulla in z_0, resta non nulla in un piccolo intorno di z_0. Quindi l'unico zero vicino a z_0 e' proprio z_0.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare uno zero z_0 di f.
2. Usare la fattorizzazione dell'ordine dello zero:

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z),\qquad g(z_0)\neq 0.$$

3. Usare la continuita' di g per trovare un intorno in cui $g(z)\neq 0$.
4. Concludere che, in quell'intorno, l'unico zero di f e' z_0.

Prerequisiti. Serve il risultato sull'ordine di uno zero, dimostrato nella Sezione 12.18. Serve inoltre il fatto elementare che, se g e' continua e $g(z_0) \neq 0$, allora esiste un intorno di z_0 in cui g non si annulla.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. $z_0 \in \Omega$;
4. $f(z_0) = 0$;
5. f non sia identicamente nulla in nessun intorno di z_0.

Tesi. Allora z_0 e' uno zero isolato di f, cioe' esiste $r > 0$ tale che

$$B(z_0, r) \subset \Omega$$

e

$$f(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}.$$

Dimostrazione. Poiche' f non e' identicamente nulla in nessun intorno di z_0, possiamo applicare il teorema sull'ordine di uno zero: esistono un intero $m \geq 1$ e una funzione g, olomorfa in un intorno di z_0, tali che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Poiche' g e' continua e $g(z_0) \neq 0$, esiste $r > 0$, abbastanza piccolo da avere $B(z_0, r) \subset \Omega$, tale che

$$g(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, r).$$

Allora, se $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, si ha

$$(z - z_0)^m \neq 0 \qquad \text{e} \qquad g(z) \neq 0.$$

Quindi

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \neq 0.$$

Dunque z_0 e' uno zero isolato.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia serve per applicare il teorema sull'ordine dello zero. Per una funzione reale o per una funzione solo continua, gli zeri possono accumularsi senza che la funzione sia identicamente nulla.

L'ipotesi locale che f non sia identicamente nulla in nessun intorno di z_0 e' essenziale. Se f fosse identicamente nulla in un intorno di z_0, allora ogni punto di quell'intorno sarebbe uno zero e z_0 non sarebbe isolato.

Osservazione. Il teorema degli zeri isolati e' il passo naturale verso il teorema dell'identita': se due funzioni olomorfe coincidono su un insieme con punto di accumulazione interno, allora la differenza ha zeri non isolati e quindi deve essere identicamente nulla.

Dopo il teorema dell'identita' si potra' formulare la versione globale: se Ω e' un dominio e f e' olomorfa in Ω, allora o $f \equiv 0$ in Ω, oppure tutti gli zeri di f sono isolati.

12.20 Teorema dell'identita'

Idea intuitiva. Un polinomio di grado n e' determinato da $n+1$ coefficienti. Per identificarlo servono quindi abbastanza condizioni, per esempio abbastanza valori della funzione in punti distinti. Una funzione olomorfa, invece, e' localmente rappresentabile da una serie di potenze:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Si puo' pensare intuitivamente a una funzione olomorfa come a un polinomio di grado infinito. I suoi coefficienti sono infiniti, ma un insieme con un punto di accumulazione fornisce infinitamente molte condizioni locali.

Se due funzioni olomorfe coincidono su un insieme con un punto di accumulazione interno, allora la loro differenza ha infiniti zeri che si accumulano. Questo forza tutti i coefficienti dello sviluppo locale della differenza ad annullarsi. Quindi la differenza e' nulla in un intorno del punto di accumulazione, e la connessione del dominio propaga questa uguaglianza a tutto il dominio.

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema dell'identita' esprime una delle forme piu' forti della rigidita' delle funzioni olomorfe. Due funzioni olomorfe su un dominio connesso non possono coincidere su un insieme con punto di accumulazione interno senza coincidere ovunque.

L'idea e' ridurre tutto agli zeri della differenza $h = f - g$. Se gli zeri di h si accumulano in un punto interno, allora quel punto non puo' essere uno zero isolato. Per il teorema degli zeri isolati, cio' forza h a essere identicamente nulla in un intorno. La connessione del dominio permette poi di propagare questa informazione locale a tutto Ω.

Questo risultato e' anche la base concettuale del prolungamento analitico: se una funzione olomorfa viene prolungata da una regione a una regione piu' grande, il prolungamento e' unico appena coincide con la funzione iniziale su un insieme con punto di accumulazione. In altre parole, una volta fissati i valori su un pezzo non discreto, l'olomorfia determina rigidamente il resto.

Struttura della dimostrazione.

1. Considerare la differenza $h = f - g$, che e' olomorfa in Ω.
2. Usare il punto di accumulazione degli zeri di h e il teorema degli zeri isolati per mostrare che h e' nulla in un intorno.
3. Definire l'insieme dei punti attorno ai quali h e' identicamente nulla.
4. Mostrare che questo insieme e' non vuoto, aperto e chiuso in Ω.
5. Usare la connessione di Ω per concludere che tale insieme e' tutto Ω.

Prerequisiti. Serve il teorema degli zeri isolati, dimostrato nella Sezione 12.19. Useremo anche il fatto topologico elementare che, in uno spazio connesso, un sottoinsieme non vuoto che e' insieme aperto e chiuso deve coincidere con tutto lo spazio.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un dominio;
2. $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ siano olomorfe in Ω;
3. l'insieme
$$E = \{z \in \Omega : \; f(z) = g(z)\}$$
abbia un punto di accumulazione $z_* \in \Omega$.

Tesi. Allora

$$f \equiv g \qquad \text{in } \Omega.$$

Equivalentemente, se h e' olomorfa in un dominio Ω e l'insieme dei suoi zeri ha un punto di accumulazione interno a Ω, allora

$$h \equiv 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$h = f - g.$$

Allora h e' olomorfa in Ω. Inoltre h si annulla su E, e quindi gli zeri di h hanno un punto di accumulazione $z_* \in \Omega$.

Mostriamo prima che h e' identicamente nulla in un intorno di z_*. Poiche' h e' continua e z_* e' punto di accumulazione degli zeri di h, si ha anche $h(z_*) = 0$. Se h non fosse identicamente nulla in nessun intorno di z_*, il teorema degli zeri isolati implicherebbe che z_* e' uno zero isolato di h. Questo e' impossibile, perche' z_* e' un punto di accumulazione di zeri di h. Dunque esiste un intorno di z_* in cui

$$h \equiv 0.$$

Definiamo ora

$$A = \{w \in \Omega : \ h \text{ e' identicamente nulla in un intorno di } w\}.$$

Dal passaggio precedente, $A \neq \varnothing$.

L'insieme A e' aperto per definizione: se $w \in A$, esiste un intorno di w su cui $h \equiv 0$, e ogni punto abbastanza vicino a w possiede a sua volta un intorno contenuto in quello stesso intorno.

Mostriamo che A e' anche chiuso in Ω. Sia $w \in \Omega$ un punto di accumulazione di A. Allora ogni intorno di w contiene punti di A, e in particolare contiene zeri di h. Quindi w e' un punto di accumulazione degli zeri di h.

Se h non fosse identicamente nulla in nessun intorno di w, il teorema degli zeri isolati implicherebbe che w e' uno zero isolato di h, in contraddizione con il fatto che w e' punto di accumulazione di zeri. Pertanto h e' identicamente nulla in un intorno di w, cioe' $w \in A$. Dunque A e' chiuso in Ω.

Abbiamo trovato un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ non vuoto, aperto e chiuso in Ω. Poiche' Ω e' connesso, segue che

$$A = \Omega.$$

Quindi $h \equiv 0$ in Ω, cioe'

$$f \equiv g \qquad \text{in } \Omega.$$

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia e' essenziale per usare il teorema degli zeri isolati. Per funzioni solo continue o anche lisce, e' possibile avere zeri con punti di accumulazione senza che la funzione sia identicamente nulla.

L'ipotesi che il punto di accumulazione sia interno a Ω e' decisiva: il teorema degli zeri isolati e' un risultato locale e richiede un intorno del punto contenuto nel dominio.

La connessione di Ω serve nella propagazione finale. Se Ω avesse piu' componenti, due funzioni olomorfe potrebbero coincidere su una componente e differire su un'altra.

Osservazione. Applicando il teorema a $g \equiv 0$, si ottiene la forma globale del teorema degli zeri isolati: se Ω e' un dominio e f e' olomorfa in Ω, allora o $f \equiv 0$ in Ω, oppure gli zeri di f sono isolati.

Il teorema dell'identita' e' il principio che rende sensato parlare di prolungamento analitico unico: due prolungamenti olomorfi che coincidono nella parte gia' nota devono coincidere ovunque nel dominio comune.

12.21 Principio del massimo modulo

Idea della dimostrazione e contesto. Il principio del massimo modulo afferma che una funzione olomorfa non costante non puo' avere un massimo locale interno del modulo. Il massimo del modulo, quando esiste su una regione chiusa e limitata, deve quindi trovarsi sul bordo.

L'idea e' usare la formula della media, che segue dalla formula integrale di Cauchy. Se $B(z_0, r) \subset \Omega$, allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Quindi il valore al centro e' la media dei valori sul bordo della circonferenza. Se $|f(z_0)|$ e' gia' massimo, questa media puo' avere modulo uguale al massimo solo se tutti i valori mediati puntano nella stessa direzione e hanno lo stesso modulo. Da qui si ottiene che f e' costante su piccole circonferenze attorno a z_0, quindi in un intorno di z_0, e infine in tutto il dominio per il teorema dell'identita'.

Nota storica. Il principio del massimo modulo appartiene al nucleo classico della teoria delle funzioni olomorfe sviluppata nell'Ottocento. La sua forma moderna e' strettamente legata alla formula integrale di Cauchy e alla visione delle funzioni olomorfe come funzioni rigidamente determinate dai valori al bordo.

Struttura della dimostrazione.

1. Ricavare la formula della media dalla formula integrale di Cauchy.
2. Applicarla su circonferenze piccole centrate nel punto di massimo locale z_0.
3. Usare la condizione di massimo locale per ottenere
$$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|.$$
4. Mostrare che l'uguaglianza nella stima della media forza $f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0)$ per ogni θ.
5. Concludere che f e' costante in un intorno di z_0, poi in tutto Ω per il teorema dell'identita'.

Prerequisiti. Serve la formula integrale di Cauchy, dimostrata nella Sezione 12.14, nella forma per punti interni al disco. Serve inoltre il teorema dell'identita', dimostrato nella Sezione 12.20.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un dominio;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. $|f|$ abbia un massimo locale in un punto interno $z_0 \in \Omega$.

Tesi. Allora

$$f \text{ e' costante in } \Omega.$$

Equivalentemente, se f e' olomorfa e non costante in un dominio Ω, allora $|f|$ non puo' avere un massimo locale in un punto interno di Ω.

Dimostrazione. Poiche' $|f|$ ha un massimo locale in z_0, esiste $\rho > 0$ tale che

$$B(z_0, \rho) \subset \Omega$$

e

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, \rho).$$

Se $f(z_0) = 0$, allora la disuguaglianza precedente diventa

$$|f(z)| \leq 0 \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, \rho),$$

quindi $f \equiv 0$ in $B(z_0, \rho)$. Per il teorema dell'identita', $f \equiv 0$ in tutto Ω. Dunque f e' costante.

Supponiamo ora $f(z_0) \neq 0$. Fissiamo r con $0 < r < \rho$. Per la formula integrale di Cauchy applicata al disco $B(z_0, r)$, parametrizzando il bordo con $z = z_0 + re^{i\theta}$, otteniamo la formula della media:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Infatti, dalla formula integrale di Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Ponendo $z = z_0 + re^{i\theta}$, si ha $dz = ire^{i\theta}\, d\theta$ e $z - z_0 = re^{i\theta}$. Quindi

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Dividiamo ora per $f(z_0)$ e poniamo

$$u(\theta) = \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{f(z_0)}.$$

Allora

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta)\, d\theta.$$

Inoltre, per la massimalita' locale di $|f(z_0)|$,

$$|u(\theta)| = \frac{|f(z_0 + re^{i\theta})|}{|f(z_0)|} \leq 1 \qquad \text{per ogni } \theta.$$

Prendendo la parte reale nella formula della media normalizzata, otteniamo

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} u(\theta)\, d\theta.$$

Ma $\operatorname{Re} u(\theta) \leq |u(\theta)| \leq 1$ per ogni θ. La funzione $1 - \operatorname{Re} u(\theta)$ e' continua, non negativa, e ha integrale nullo. Quindi

$$\operatorname{Re} u(\theta) = 1 \qquad \text{per ogni } \theta.$$

Poiche' $|u(\theta)| \leq 1$, da $\operatorname{Re} u(\theta) = 1$ segue

$$u(\theta) = 1 \qquad \text{per ogni } \theta.$$

Dunque

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = f(z_0) \qquad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Poiche' r e' arbitrario con $0 < r < \rho$, la funzione f e' uguale a $f(z_0)$ in tutto il disco puntato $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, e quindi anche in z_0. Pertanto

$$f \equiv f(z_0) \qquad \text{in } B(z_0, \rho).$$

Per il teorema dell'identita', essendo Ω connesso, segue che

$$f \equiv f(z_0) \qquad \text{in } \Omega.$$

Quindi f e' costante in Ω.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia serve per usare la formula integrale di Cauchy e quindi la formula della media. Per funzioni reali o complesse solo continue il risultato e' falso: una funzione continua puo' avere un massimo locale interno senza essere costante.

L'ipotesi che il massimo sia interno e' essenziale. Le funzioni olomorfe non costanti possono raggiungere il massimo del modulo sul bordo di una regione. Per esempio $f(z) = z$ nel disco chiuso unitario ha massimo del modulo sul bordo $|z| = 1$, non all'interno.

La connessione di Ω serve per propagare la costanza locale a tutto il dominio tramite il teorema dell'identita'. Se il dominio avesse piu' componenti, una funzione potrebbe essere costante su una componente e diversa su un'altra.

Osservazione. Il principio del massimo modulo mostra che, per una funzione olomorfa non costante, i valori interni sono rigidamente controllati dai valori al bordo. Questa idea e' alla base di molti risultati successivi, tra cui il principio del minimo modulo e vari teoremi di unicita' e stima.

12.22 Principio del minimo modulo

Idea della dimostrazione e contesto. Il principio del minimo modulo e' il corrispettivo del principio del massimo modulo per funzioni che non si annullano. Se f non ha zeri, allora si puo' considerare la funzione reciproca $1/f$. Un minimo locale di $|f|$ diventa un massimo locale di $|1/f|$.

Struttura della dimostrazione.

1. Usare l'ipotesi $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ e definire $1/f$.
2. Osservare che $1/f$ e' olomorfa in Ω.
3. Trasformare il minimo locale di $|f|$ in un massimo locale di $|1/f|$.
4. Applicare il principio del massimo modulo.

Prerequisiti. Serve il principio del massimo modulo, dimostrato nella Sezione 12.21. Serve inoltre la regola di derivazione del reciproco: se f e' olomorfa e non si annulla, allora $1/f$ e' olomorfa.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un dominio;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$;
4. $|f|$ abbia un minimo locale in un punto $z_0 \in \Omega$.

Tesi. Allora

$$f \text{ e' costante in } \Omega.$$

Equivalentemente, se f e' olomorfa, non costante e senza zeri in un dominio Ω, allora $|f|$ non puo' avere un minimo locale in un punto interno di Ω.

Dimostrazione. Poiche' f non si annulla in Ω, la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

e' olomorfa in Ω.

Poiche' $|f|$ ha un minimo locale in z_0, esiste $\rho > 0$ tale che

$$B(z_0, \rho) \subset \Omega$$

e

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, \rho).$$

Dato che f non si annulla, $|f(z_0)| > 0$. Passando ai reciproci, otteniamo

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{|f(z_0)|} \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, \rho).$$

Cioe'

$$|g(z)| \leq |g(z_0)| \qquad \text{per ogni } z \in B(z_0, \rho).$$

Quindi $|g|$ ha un massimo locale interno in z_0. Per il principio del massimo modulo, g e' costante in Ω. Poiche'

$$f = \frac{1}{g},$$

anche f e' costante in Ω.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $f(z) \neq 0$ in Ω e' essenziale per definire $1/f$ come funzione olomorfa su tutto il dominio. Senza questa ipotesi il risultato e' falso: se $f(z_0) = 0$, allora $|f|$ ha un minimo locale in z_0, ma f non deve essere costante. Per esempio $f(z) = z$ ha un minimo del modulo in 0.

La connessione di Ω entra tramite il principio del massimo modulo applicato a $1/f$. Su domini non connessi si potrebbe ottenere costanza solo componente per componente.

Osservazione. Il principio del minimo modulo non dice che una funzione olomorfa non costante non possa avere zeri. Dice invece che, se non ha zeri, allora il modulo non puo' avere minimi locali interni. Quando uno zero esiste, $|f|$ raggiunge naturalmente il valore minimo 0 in quel punto.

12.23 Teorema di Liouville

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema di Liouville afferma che una funzione olomorfa su tutto il piano complesso e limitata non puo' variare: deve essere costante. Questo risultato non ha un analogo reale cosi' rigido. Per esempio,

$$g(x) = \sin x$$

e' derivabile e limitata su $\mathbb{R}$, ma non e' costante.

Un modo equivalente di leggere il teorema e' tramite la contrapposta: una funzione intera non costante deve diventare arbitrariamente grande in modulo. Per esempio,

$$f(z) = z^n$$

tende a infinito lungo l'asse reale positivo, mentre

$$f(z) = e^z$$

tende a infinito per $z = x \to +\infty$. Anche una funzione come

$$f(z) = \sin z$$

che sull'asse reale resta limitata, diventa illimitata nel piano complesso, perche'

$$\sin(iy) = i \sinh y$$

e quindi $|\sin(iy)| \to +\infty$ per $y \to +\infty$. Liouville dice che questo fenomeno non e' accidentale: se f e' intera e non costante, allora esiste una successione z_k tale che

$$|z_k| \to +\infty \qquad \text{e} \qquad |f(z_k)| \to +\infty.$$

In altre parole, una funzione intera non costante non puo' rimanere confinata in una regione limitata del piano dei valori.

Il motivo profondo e' che, in analisi complessa, le derivate interne sono controllate dai valori della funzione sui bordi dei dischi. Se la funzione e' limitata su tutto il piano, possiamo prendere dischi sempre piu' grandi. Le stime di Cauchy danno

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Mandando $R \to +\infty$, la derivata deve annullarsi.

Nota storica. Il teorema porta il nome di Joseph Liouville (1809–1882). Nel contesto dell'analisi complessa mostra una delle prime forme di rigidita' delle funzioni olomorfe: una condizione globale molto semplice, la limitatezza su tutto il piano, forza una conclusione estremamente forte, cioe' la costanza. Questa rigidita' non ha un parallelo diretto nell'analisi reale elementare.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un punto arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$.
2. Applicare le stime di Cauchy al disco
$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$
3. Usare la limitatezza globale:
$$|f(z)| \leq M \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$
4. Ottenere
$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$$
per ogni $R > 0$.
5. Mandare $R \to +\infty$, concludere che $f'(z_0) = 0$, e usare l'arbitrarieta' di z_0.

Prerequisiti. Servono le stime di Cauchy nel caso $n = 1$: se f e' olomorfa in un intorno del disco chiuso
$$\overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\},$$
allora
$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \max_{z \in \partial D_R} |f(z)|.$$
Serve inoltre il fatto elementare che, se una funzione olomorfa ha derivata nulla su un dominio connesso, allora e' costante su quel dominio.

Enunciato. Si assuma che:

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e' intera, cioe' olomorfa in tutto $\mathbb{C}$.
2. f e' limitata su $\mathbb{C}$, cioe' esiste $M > 0$ tale che
$$|f(z)| \leq M \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Tesi. Allora f e' costante in $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Fissiamo un punto arbitrario
$$z_0 \in \mathbb{C}.$$
Per ogni $R > 0$, consideriamo il disco
$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$
Poiche' f e' intera, e' olomorfa in un intorno di $\overline{D_R}$. Possiamo quindi applicare le stime di Cauchy con $n = 1$:
$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{R} \max_{z \in \partial D_R} |f(z)|.$$
Formula. Stima di Cauchy per la derivata prima sul disco D_R.

Poiche' f e' limitata su tutto $\mathbb{C}$, in particolare sul bordo ∂D_R si ha
$$\max_{z \in \partial D_R} |f(z)| \leq M.$$
Quindi
$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \qquad \text{per ogni } R > 0.$$

Passaggio. La costante M non dipende da R, perche' la limitazione e' globale su tutto il piano.

Poiche' questa disuguaglianza vale per ogni $R > 0$, e poiche'

$$\frac{M}{R} \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty,$$

otteniamo

$$|f'(z_0)| = 0.$$

Passaggio. Se fosse $|f'(z_0)| > 0$, potremmo scegliere R sufficientemente grande in modo che

$$\frac{M}{R} < |f'(z_0)|,$$

in contraddizione con la stima precedente.

Dunque

$$f'(z_0) = 0.$$

Poiche' $z_0 \in \mathbb{C}$ era arbitrario, segue che

$$f'(z) = 0 \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Essendo $\mathbb{C}$ connesso, una funzione olomorfa con derivata nulla su tutto $\mathbb{C}$ e' costante. Quindi f e' costante.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che f sia intera serve per poter applicare le stime di Cauchy su dischi di raggio arbitrariamente grande centrati in qualunque punto z_0. Se f fosse olomorfa solo in un dominio limitato, non potremmo mandare $R \to +\infty$. In effetti la limitatezza su un dominio limitato non basta: la funzione

$$f(z) = z$$

e' olomorfa e limitata nel disco unitario, ma non e' costante.

L'ipotesi di limitatezza e' decisiva perche' fornisce una costante M indipendente dal raggio R. Senza questa ipotesi il risultato e' falso: per esempio

$$f(z) = z$$

e' intera, ma non e' costante. In questo caso non esiste un M globale tale che $|z| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

La connessione di $\mathbb{C}$ entra nell'ultimo passaggio: da

$$f'(z) = 0 \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}$$

deduciamo che f e' costante su tutto il piano, non solo localmente. Infatti, lungo ogni curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, si ha

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma f'(z)\, dz = 0.$$

Osservazione. Il teorema di Liouville e' uno dei primi esempi della rigidita' delle funzioni olomorfe. Una condizione apparentemente debole, essere limitata su tutto il piano, forza una conclusione molto forte: la funzione non puo' variare. La prossima applicazione naturale e' il teorema fondamentale dell'algebra: applicando Liouville a una funzione costruita a partire da un polinomio senza zeri, si dimostra che ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ammette almeno uno zero.

12.24 Teorema fondamentale dell'algebra

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema fondamentale dell'algebra afferma che ogni polinomio non costante a coefficienti complessi possiede almeno uno zero complesso. Questo risultato chiude, nel campo complesso, il problema dell'esistenza di soluzioni per equazioni polinomiali non costanti.

La dimostrazione tramite Liouville e' particolarmente elegante perche' trasforma un problema algebrico in un problema di analisi complessa. Se un polinomio p non avesse zeri, allora la funzione

$$\frac{1}{p(z)}$$

sarebbe intera. Inoltre, poiche' un polinomio non costante diventa grande per $|z| \to +\infty$, la funzione $1/p$ dovrebbe tendere a zero all'infinito. Quindi $1/p$ sarebbe intera e limitata. Per Liouville dovrebbe essere costante, e allora anche p sarebbe costante: contraddizione.

Struttura della dimostrazione.

1. Supporre per assurdo che un polinomio non costante p non abbia zeri in $\mathbb{C}$.
2. Considerare la funzione
$$g(z) = \frac{1}{p(z)}.$$
3. Mostrare che g e' intera, perche' $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.
4. Mostrare che g e' limitata: fuori da un disco grande $p(z)$ e' grande, mentre sul disco chiuso rimanente g e' continua e quindi limitata.
5. Applicare Liouville a g, concludere che g e' costante, e ottenere la contraddizione con il fatto che p non e' costante.

Prerequisiti. Servono il teorema di Liouville e due fatti elementari sui polinomi. Il primo e' che, se un polinomio non si annulla mai, allora il suo reciproco e' olomorfo in tutto il piano. Il secondo e' che un polinomio non costante tende a infinito in modulo per $|z| \to +\infty$.

Quest'ultimo fatto si vede cosi'. Se

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0, \qquad n \geq 1,$$

allora, per $z \neq 0$,

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Il fattore tra parentesi tende ad a_n per $|z| \to +\infty$. Quindi, per $|z|$ abbastanza grande, esso ha modulo almeno $|a_n|/2$. Di conseguenza

$$|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n$$

per $|z|$ abbastanza grande, e dunque $|p(z)| \to +\infty$.

Enunciato. Si assuma che:

1. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e' un polinomio a coefficienti complessi.
2. p non e' costante, cioe'

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0, \qquad n \geq 1.$$

Tesi. Allora esiste almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che

$$p(z_0) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che p non abbia zeri in $\mathbb{C}$. Allora

$$p(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Possiamo quindi definire

$$g(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

Poiche' p e' un polinomio e non si annulla mai, g e' olomorfa in tutto $\mathbb{C}$. Dunque g e' intera.

Mostriamo ora che g e' limitata. Per il fatto richiamato nei prerequisiti, poiche' p e' un polinomio non costante, si ha

$$|p(z)| \to +\infty \qquad \text{per } |z| \to +\infty.$$

In particolare esiste $R > 0$ tale che

$$|p(z)| \geq 1 \qquad \text{per ogni } |z| \geq R.$$

Quindi, per $|z| \geq R$,

$$|g(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq 1.$$

Passaggio. Fuori da un disco abbastanza grande il polinomio ha modulo almeno 1, quindi il suo reciproco ha modulo al piu' 1.

Resta da controllare g nel disco chiuso

$$\overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

La funzione g e' continua su $\overline{D_R}$, che e' compatto. Quindi esiste

$$M_R = \max_{|z| \leq R} |g(z)|.$$

Ponendo

$$M = \max\{1, M_R\},$$

otteniamo

$$|g(z)| \leq M \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Dunque g e' intera e limitata.

Per il teorema di Liouville, g e' costante. Esiste quindi $c \in \mathbb{C}$ tale che

$$g(z) = c \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Poiche' $g(z) = 1/p(z)$, segue che

$$\frac{1}{p(z)} = c \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

In particolare $c \neq 0$, perche' $g(z) = 1/p(z)$ non si annulla mai. Allora

$$p(z) = \frac{1}{c} \qquad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Quindi p e' costante, in contraddizione con l'ipotesi $n \geq 1$.

La supposizione iniziale era falsa. Dunque p deve avere almeno uno zero in $\mathbb{C}$.

Ruolo delle ipotesi. Il punto essenziale e' che gli zeri vengono cercati in $\mathbb{C}$. Se ci si limita a cercare zeri reali, il risultato e' falso: per esempio il polinomio

$$p(x) = x^2 + 1$$

non ha zeri reali. Considerato invece come polinomio complesso, ha gli zeri i e $-i$. I coefficienti reali non sono un ostacolo: sono un caso particolare dei coefficienti complessi.

L'ipotesi che p non sia costante e' necessaria. Un polinomio costante non nullo, per esempio

$$p(z) = 1,$$

non ha zeri. Un polinomio costante nullo, invece, ha ogni punto come zero, ma non rappresenta il caso algebrico interessante.

L'ipotesi che p sia un polinomio serve in due punti. Prima garantisce che, se p non ha zeri, allora $1/p$ e' intera. Poi garantisce la crescita

$$|p(z)| \to +\infty \qquad \text{per } |z| \to +\infty,$$

che rende $1/p$ limitata fuori da un disco grande. Senza questa crescita, l'argomento con Liouville non partirebbe.

Osservazione. Il teorema afferma l'esistenza di almeno uno zero. Una volta trovato uno zero z_0, il teorema di Ruffini permette di scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z),$$

dove q ha grado $n - 1$. Ripetendo il procedimento per induzione sul grado, si ottiene la forma completa: un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n zeri complessi contati con molteplicita'.

12.25 Teorema di Morera

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema di Morera e' una specie di converso del teorema di Cauchy-Goursat. Cauchy-Goursat dice che, se una funzione e' olomorfa, allora certi integrali lungo curve chiuse si annullano. Morera va nella direzione opposta: se una funzione continua ha integrale nullo lungo il bordo di ogni triangolo, allora la funzione e' olomorfa.

Il risultato e' importante perche' fornisce un criterio di olomorfia che non passa direttamente dal calcolo del limite del rapporto incrementale. In molte situazioni e' piu' facile controllare integrali su curve chiuse che verificare direttamente la derivabilita' complessa.

L'idea della dimostrazione e' costruire una primitiva locale. In un piccolo disco $D \subset \Omega$, fissiamo un punto z_0 e definiamo

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

La condizione sugli integrali dei triangoli permette di dimostrare che

$$F'(z) = f(z).$$

Quindi f e' localmente la derivata di una funzione olomorfa. Poiche' le derivate delle funzioni olomorfe sono olomorfe, segue che f e' olomorfa.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un disco $D \subset \Omega$ e un punto $z_0 \in D$.
2. Definire, per $z \in D$,
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$
3. Usare l'ipotesi sugli integrali dei triangoli per ottenere
$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

4. Dividere per h, parametrizzare il segmento $\zeta = z + th$, e usare la continuita' di f per concludere
$$F'(z) = f(z).$$
5. Concludere che F e' olomorfa e che $f = F'$ e' olomorfa nel disco. Poiche' il disco e' arbitrario, f e' olomorfa in Ω.

Prerequisiti. Servono la definizione di integrale complesso lungo un segmento e il fatto che i dischi sono convessi: se $z_0, z \in D$, allora il segmento $[z_0, z]$ e' contenuto in D.

Serve inoltre il risultato, gia' ottenuto dalla formula integrale di Cauchy per le derivate, che le funzioni olomorfe sono derivabili infinite volte. In particolare, se F e' olomorfa, allora la sua derivata F' e' ancora olomorfa.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ e' un aperto.
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e' continua in Ω.
3. Per ogni triangolo chiuso Δ, inteso come la regione triangolare piena insieme al suo bordo, contenuto in Ω, vale
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0,$$
dove $\partial\Delta$ e' orientato positivamente.

Tesi. Allora f e' olomorfa in Ω.

Dimostrazione. Fissiamo un punto arbitrario $a \in \Omega$. Poiche' Ω e' aperto, esiste $r > 0$ tale che
$$\overline{B(a, r)} \subset \Omega.$$
Poniamo
$$D = B(a, r).$$
Dimostriamo che f e' olomorfa in D. Poiche' a e' arbitrario, questo bastera' a concludere che f e' olomorfa in tutto Ω.

Fissiamo un punto $z_0 \in D$. Per ogni $z \in D$, definiamo
$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$
Definizione. Il segmento $[z_0, z]$ e' contenuto in D, perche' D e' convesso.

Mostriamo che
$$F'(z) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in D.$$
Siano $z \in D$ e $h \in \mathbb{C}$, con $h \neq 0$, abbastanza piccolo da avere $z + h \in D$ e il triangolo di vertici
$$z_0, \qquad z, \qquad z + h$$
contenuto in D. Per ipotesi, l'integrale di f sul bordo di questo triangolo e' nullo:
$$\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$
Poiche'
$$\int_{[z+h,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

otteniamo
$$\int_{[z_0,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$
In termini di F, questo significa
$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$
Passaggio. L'ipotesi sugli integrali dei triangoli permette di sostituire la differenza tra due integrali da z_0 con l'integrale lungo il segmento breve da z a $z+h$.

Dividiamo per h:
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$
Parametrizziamo il segmento $[z, z+h]$ con
$$\zeta = z + th, \qquad 0 \le t \le 1.$$
Allora $d\zeta = h\,dt$, e quindi
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,h\,dt = \int_0^1 f(z+th)\,dt.$$
Prima uguaglianza. Sostituzione $\zeta = z + th$, con $d\zeta = h\,dt$.
Seconda uguaglianza. Semplificazione del fattore h, possibile perche' $h \neq 0$.

Facendo $h \to 0$, i punti del segmento $[z, z+h]$ si avvicinano uniformemente a z. Infatti, per ogni $t \in [0,1]$,
$$|z + th - z| = |th| \le |h|.$$
Poiche' f e' continua in z, otteniamo
$$f(z+th) \to f(z) \qquad \text{uniformemente per } 0 \le t \le 1.$$
Quindi
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z)\,dt = f(z).$$
Abbiamo dimostrato che
$$F'(z) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in D.$$
Dunque F e' olomorfa in D. Per il risultato sulle derivate delle funzioni olomorfe, anche F' e' olomorfa in D. Ma
$$F' = f.$$
Quindi f e' olomorfa in D.

Poiche' il punto $a \in \Omega$ era arbitrario, ogni punto di Ω ha un intorno in cui f e' olomorfa. Pertanto f e' olomorfa in Ω.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che Ω sia aperto serve per poter lavorare localmente in un disco $D \subset \Omega$. Senza un intorno aperto del punto, non ha senso parlare di olomorfia nel punto.

La continuita' di f e' usata nel passaggio
$$\int_0^1 f(z+th)\,dt \to \int_0^1 f(z)\,dt.$$
Senza continuita', questa dimostrazione non permette di concludere che
$$F'(z) = f(z).$$

Esistono versioni piu' avanzate del teorema di Morera con ipotesi piu' deboli, ma richiedono strumenti non necessari in questa dispensa.

L'ipotesi sugli integrali dei triangoli e' il cuore del teorema. Serve per trasformare la differenza

$$F(z+h)-F(z)$$

nell'integrale lungo il segmento breve $[z, z+h]$. Senza questa ipotesi non possiamo costruire la primitiva locale. Per esempio, la funzione

$$f(z)=\overline{z}$$

e' continua, ma non e' olomorfa; infatti, per un triangolo Δ orientato positivamente,

$$\int_{\partial\Delta} \overline{z}\, dz = 2i \ \mathrm{Area}(\Delta),$$

che non e' nullo se il triangolo ha area positiva. Quindi l'annullamento degli integrali sui triangoli non e' una conseguenza della sola continuita': e' una condizione profondamente legata all'olomorfia.

Osservazione. Morera completa il quadro concettuale con Cauchy-Goursat:

$$f \text{ olomorfa} \Longrightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

e

$$f \text{ continua}, \quad \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0 \text{ per ogni triangolo} \Longrightarrow f \text{ olomorfa.}$$

In questo senso gli integrali sui triangoli caratterizzano l'olomorfia, a patto di assumere la continuita' della funzione.

12.26 Sviluppo di Laurent in una corona

Idea della dimostrazione e contesto. La formula integrale di Cauchy non serve solo a costruire sviluppi di Taylor nel disco: in una corona permette di separare il contributo del bordo esterno da quello del bordo interno. Sviluppando il nucleo $\frac{1}{\zeta - z}$ in due serie geometriche diverse, compaiono sia potenze non negative sia potenze negative di $z - z_0$. Questo e' il meccanismo di base dello sviluppo di Laurent.

Nota storica. Lo sviluppo prende il nome da Pierre Alphonse Laurent (1813–1854). Il suo lavoro si inserisce nello sviluppo ottocentesco della teoria delle funzioni complesse, quando gli strumenti introdotti da Cauchy vennero estesi allo studio sistematico delle singolarita'. Le serie di Laurent completano le serie di Taylor: non descrivono solo il comportamento regolare vicino a un punto, ma anche la parte singolare.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un punto z nella corona e scegliere due circonferenze concentriche, una interna e una esterna, che lo separano dai due bordi.

2. Usare la formula integrale di Cauchy nella corona come differenza tra l'integrale sul bordo esterno e quello sul bordo interno.

3. Sviluppare il nucleo $\frac{1}{\zeta - z}$ con una serie geometrica sul bordo esterno e con un'altra sul bordo interno.

4. Integrare termine a termine e leggere i coefficienti delle potenze positive e negative di $z - z_0$.

5. Osservare che gli integrali che definiscono i coefficienti non dipendono dalla circonferenza scelta, purche' resti nella corona.

Prerequisiti. Serve la formula integrale di Cauchy in una corona: se f e' olomorfa in

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \; r < |z - z_0| < R\},$$

e se ρ_1, ρ_2 soddisfano

$$r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R,$$

allora, con $C_{\rho_j} = \{|\zeta - z_0| = \rho_j\}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Serve inoltre la serie geometrica nella forma

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \qquad |q| < 1,$$

e il fatto che una serie uniformemente convergente si puo' integrare termine a termine.

Enunciato. Si assuma che:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : \; r < |z - z_0| < R\}$ sia una corona, con $0 \le r < R \le +\infty$;
2. $f : A \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in A.

Tesi. Allora, per ogni $z \in A$, vale

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

intendendo la serie di Laurent come somma della parte regolare e della parte principale:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

I coefficienti sono dati, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, da

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

e γ e' una circonferenza centrata in z_0 contenuta in A.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in A$. Scegliamo due raggi ρ_1, ρ_2 tali che

$$r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R.$$

Con $C_{\rho_j} = \{|\zeta - z_0| = \rho_j\}$, la formula integrale di Cauchy in una corona fornisce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Sul bordo esterno C_{ρ_2} vale $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$, quindi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

La convergenza e' uniforme su C_{ρ_2}, perche' il rapporto ha modulo strettamente minore di 1. Possiamo quindi integrare termine a termine:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \right] (z - z_0)^n.$$

Sul bordo interno C_{ρ_1} vale invece $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$, quindi

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Anche qui la convergenza e' uniforme su C_{ρ_1}. Pertanto

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\,d\zeta\right](z - z_0)^{-n-1}.$$

Sommando le due rappresentazioni otteniamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}^- (z - z_0)^{-n},$$

dove

$$a_n^+ = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad n \geq 0,$$

e

$$a_{-n}^- = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}\,d\zeta, \qquad n \geq 1.$$

Mostriamo ora che questi coefficienti non dipendono dalla circonferenza scelta. Siano C_ρ e C_σ due circonferenze centrate in z_0 contenute nella corona, con $r < \rho < \sigma < R$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la funzione

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

e' olomorfa nella regione anulare chiusa

$$\rho \leq |\zeta - z_0| \leq \sigma.$$

Tagliando tale regione lungo un segmento radiale, otteniamo un dominio semplicemente connesso su cui possiamo applicare il teorema di Cauchy-Goursat. Ne segue che

$$\int_{C_\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta - \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = 0.$$

Dunque

$$\int_{C_\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Possiamo dunque scrivere tutti i coefficienti con una sola circonferenza $\gamma \subset A$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che f sia olomorfa nella corona e' cio' che consente di muoversi liberamente tra circonferenze concentriche senza cambiare gli integrali dei coefficienti. Se la funzione avesse una singolarita' nella corona, il meccanismo di decomposizione in serie di Laurent si romperebbe.

La presenza di due bordi, interno ed esterno, e' essenziale: il bordo esterno produce la parte a potenze non negative, quello interno produce la parte principale. Senza una corona non ci sarebbe spazio per distinguere le due componenti.

La scelta di circonferenze concentriche rende immediata la stima

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1 \qquad \text{oppure} \qquad \left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1,$$

e quindi permette l'uso della serie geometrica.

Osservazione. I coefficienti di Laurent hanno la stessa struttura dei coefficienti di Taylor, ma la parte negativa contiene l'informazione sulla singolarita' centrale. In particolare, il coefficiente a_{-1} sara' il residuo della funzione in z_0, e questo e' il punto di collegamento naturale con il teorema dei residui.

12.27 Unicita' dello sviluppo di Laurent

Idea della dimostrazione e contesto. Dopo aver mostrato che una funzione olomorfa in una corona ammette uno sviluppo di Laurent, il passo naturale e' capire se quei coefficienti siano determinati in modo univoco. La risposta e' si': ogni coefficiente si legge integrando la funzione contro una potenza opportuna di $(\zeta - z_0)$. Questo rende rigorosa l'idea che la parte principale di Laurent non dipende da scelte arbitrarie.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare una circonferenza γ centrata in z_0 contenuta nella corona.
2. Sostituire lo sviluppo di Laurent dentro l'integrale che estrae il coefficiente a_n.
3. Integrare termine a termine e usare il fatto che

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m \, d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1. \end{cases}$$

4. Concludere che ogni coefficiente a_n e' determinato dalla sola funzione f.

Prerequisiti. Serve il teorema di Laurent appena dimostrato nella Sezione 12.26. Serve inoltre che, su una curva chiusa, una serie uniformemente convergente si possa integrare termine a termine. In particolare, se γ e' una circonferenza centrata in z_0, orientata positivamente, allora

$$\int_\gamma (\zeta - z_0)^m \, d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1. \end{cases}$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $A = \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R\}$ sia una corona;
2. $f : A \to \mathbb{C}$ ammetta uno sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tesi. I coefficienti a_n sono univocamente determinati e, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, valgono

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

dove γ e' una circonferenza centrata in z_0, contenuta in A e orientata positivamente.

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{Z}$ e una circonferenza γ centrata in z_0, contenuta in A. Poiche' lo sviluppo di Laurent converge uniformemente sui compatti della corona e in particolare su γ, possiamo sostituirlo nell'integrale. Equivalentemente, si possono integrare termine a termine la parte regolare e la parte principale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (\zeta - z_0)^{k-n-1} \, d\zeta.$$

Integrando termine a termine otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\zeta-z_0)^{k-n-1}\,d\zeta.$$

Ora l'integrale

$$\int_\gamma (\zeta-z_0)^m\,d\zeta$$

e' nullo per $m \neq -1$, mentre vale $2\pi i$ per $m=-1$. Quindi l'unico termine non nullo nella somma precedente e' quello con $k-n-1=-1$, cioe' $k=n$. Ne segue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = a_n.$$

Questo mostra sia la formula sia l'unicita' dei coefficienti.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che la funzione sia definita in una corona e' essenziale per avere sia la parte regolare sia la parte principale dello sviluppo. Se il centro appartenesse al dominio, lo sviluppo si ridurrebbe a Taylor.

La scelta di una circonferenza γ interna alla corona garantisce che lo sviluppo di Laurent sia uniformemente convergente sulla curva e quindi integri termine a termine senza problemi.

L'integrale con la potenza $(\zeta-z_0)^{-(n+1)}$ estrae precisamente il coefficiente a_n. Questo spiega perche' la parte principale e' unica: non ci sono coefficienti alternativi compatibili con la stessa funzione.

Osservazione. Insieme al teorema della Sezione 12.26, questo risultato rende rigoroso l'uso delle frasi:

$$a_{-1} \text{ e' il residuo,}$$

e

la singolarita' si classifica guardando la parte negativa.

12.28 Singolarita' isolate

Idea e contesto. Dopo lo sviluppo di Laurent, attorno a una singolarita' isolata di una funzione olomorfa si distinguono in modo naturale tre comportamenti diversi. Prima di passare alla caratterizzazione tramite Laurent, fissiamo le definizioni standard.

Definizioni. Sia f una funzione definita e olomorfa nella corona puntata

$$0 < |z-z_0| < R.$$

Allora z_0 si dice *singolarita' isolata* di f se f non e' definita in z_0, oppure se e' definita ma non e' olomorfa in z_0.

Una singolarita' isolata z_0 si dice:

1. *rimovibile* se f puo' essere estesa a una funzione olomorfa anche in z_0;
2. *polo di ordine* m, con $m \geq 1$, se esiste una funzione g olomorfa in un intorno di z_0, con $g(z_0) \neq 0$, tale che
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m};$$
3. *essenziale* se non e' ne' rimovibile ne' un polo.

Osservazione. La caratterizzazione di questi tre casi tramite lo sviluppo di Laurent verra' dimostrata subito dopo: la parte negativa dello sviluppo determina se la singolarita' e' rimovibile, un polo oppure essenziale.

12.29 Caratterizzazione delle singolarita' isolate tramite Laurent

Idea della dimostrazione e contesto. Una volta fissato lo sviluppo di Laurent, la natura della singolarita' in z_0 si legge direttamente dalla parte negativa della serie. Se non compaiono termini negativi, la singolarita' e' rimovibile; se i termini negativi sono finiti, la singolarita' e' un polo; se la parte principale e' infinita, la singolarita' e' essenziale. Questo e' il modo standard di tradurre una definizione locale in una forma esplicita di serie.

Struttura della dimostrazione.

1. Usare lo sviluppo di Laurent nel punto isolato z_0.
2. Riconoscere il caso in cui non compaiono potenze negative: la serie diventa un Taylor e la singolarita' e' rimovibile.
3. Riconoscere il caso in cui compaiono solo finitemente molte potenze negative: moltiplicando per una potenza opportuna di $z - z_0$ si ottiene una funzione olomorfa non nulla in z_0, cioe' un polo.
4. Osservare che il caso restante e' proprio quello essenziale.

Prerequisiti. Serve il teorema di Laurent nella corona, nella forma dimostrata nella Sezione 12.26, e serve l'unicita' dello sviluppo di Laurent, dimostrata nella Sezione 12.27. Serve inoltre il fatto elementare che una serie di potenze senza termini negativi definisce una funzione olomorfa nel disco di convergenza.

Enunciato. Si assuma che:

1. f sia olomorfa in una corona puntata
$$0 < |z - z_0| < R;$$
2. f ammetta in tale corona uno sviluppo di Laurent
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Tesi. Vale quanto segue:

$$\begin{aligned} z_0 \text{ rimovibile} &\iff a_n = 0 \quad \forall n < 0, \\ z_0 \text{ polo di ordine } m &\iff a_{-m} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_n = 0 \quad \forall n < -m, \\ z_0 \text{ essenziale} &\iff \text{la parte principale contiene infiniti termini non nulli.} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo le tre equivalenze separatamente.
Prima equivalenza. Supponiamo inizialmente che $a_n = 0$ per ogni $n < 0$. Allora lo sviluppo di Laurent si riduce a
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
Questa e' una serie di potenze che converge almeno per $0 < |z - z_0| < R$. Quindi ha raggio di convergenza almeno R e definisce una funzione olomorfa anche nel centro z_0. In particolare, fornisce un'estensione olomorfa di f anche in z_0. Dunque z_0 e' rimovibile.

Viceversa, se z_0 e' rimovibile, esiste una funzione $\widetilde{f}$ olomorfa in un intorno di z_0 che coincide con f fuori da z_0. La funzione $\widetilde{f}$ ammette il suo sviluppo di Taylor in z_0, che e' uno sviluppo di Laurent senza termini negativi. Per unicita' dello sviluppo di Laurent, i coefficienti negativi di f devono essere tutti nulli.
Seconda equivalenza. Supponiamo che esista $m \geq 1$ tale che $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$. Allora
$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Moltiplicando per $(z-z_0)^m$ otteniamo

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+m}.$$

Il membro destro e' una serie di potenze, quindi definisce una funzione olomorfa in un intorno di z_0. Inoltre, il suo valore in z_0 e'

$$a_{-m} \neq 0.$$

Segue che

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

con g olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Dunque z_0 e' un polo di ordine m.

Viceversa, se z_0 e' un polo di ordine m, per definizione esiste una funzione g olomorfa in un intorno di z_0 e tale che $g(z_0) \neq 0$, con

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Sviluppando g in serie di Taylor,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^k,$$

si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-z_0)^{k-m}.$$

Il termine con $k=0$ e' $b_0(z-z_0)^{-m}$, mentre per $k>0$ gli esponenti sono $-m+1, -m+2, \ldots$. Non compaiono quindi potenze $(z-z_0)^n$ con $n < -m$. Questo e' uno sviluppo di Laurent con termini negativi solo fino a $(z-z_0)^{-m}$, e il coefficiente di tale termine e' $b_0 = g(z_0) \neq 0$. Quindi $a_{-m} \neq 0$ e $a_n = 0$ per ogni $n < -m$.
Terza equivalenza. Se la parte principale contiene infiniti termini non nulli, la singolarita' non puo' essere rimovibile, perche' in quel caso tutti i coefficienti negativi sarebbero nulli. Non puo' neppure essere un polo, perche' un polo ha parte principale finita. Dunque la singolarita' e' essenziale.

Viceversa, se la singolarita' e' essenziale, non e' ne' rimovibile ne' un polo. Per la prima equivalenza, cio' implica che esiste almeno un coefficiente negativo non nullo; per la seconda, che i coefficienti negativi non possono essere solo finitemente molti. Quindi la parte principale contiene infinitamente molti termini non nulli.

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che f sia olomorfa in una corona puntata e' esattamente cio' che permette di parlare di singolarita' isolata e di applicare Laurent. Senza questa ipotesi non esiste la distinzione fra parte regolare e parte principale.

L'unicita' dello sviluppo di Laurent e' decisiva per passare da una descrizione funzionale della singolarita' a una classificazione in termini di coefficienti. E' proprio l'unicita' che rende significative le affermazioni $a_n = 0$ per $n < 0$ e $a_{-m} \neq 0$.

Osservazione. Questa caratterizzazione e' la base operativa per classificare le singolarita' isolate. In particolare, il residuo e' il coefficiente a_{-1}, mentre il tipo della singolarita' si legge dalla struttura della parte negativa dello sviluppo di Laurent.

12.30 Criterio per singolarita' rimovibili

Idea della dimostrazione e contesto. Una singolarita' isolata rimovibile e' una singolarita' solo apparente: la funzione non e' definita bene nel punto, ma il suo comportamento vicino al punto non esplode. Il criterio dice che la limitatezza vicino alla singolarita' basta per eliminare la singolarita'.

L'idea e' leggere la singolarita' tramite Laurent. Se f e' limitata vicino a z_0, allora i coefficienti negativi dello sviluppo di Laurent devono essere nulli. Quindi la parte principale scompare e la singolarita' e' rimovibile.

Struttura della dimostrazione.

1. Scrivere i coefficienti negativi di Laurent tramite integrale su una circonferenza centrata in z_0.
2. Usare la limitatezza di f vicino a z_0.
3. Applicare la stima ML su una circonferenza di raggio ε.
4. Mandare $\varepsilon \to 0^+$ e ottenere che tutti i coefficienti negativi sono nulli.
5. Concludere con la caratterizzazione delle singolarita' isolate tramite Laurent.

Prerequisiti. Servono la formula dei coefficienti di Laurent e la loro unicita', dimostrate nelle Sezioni 12.26 e 12.27. Serve inoltre la stima ML per integrali complessi:

$$\left| \int_\gamma g(z)\, dz \right| \le L(\gamma) \max_{z \in \gamma([a,b])} |g(z)|.$$

Infine useremo la caratterizzazione delle singolarita' isolate tramite Laurent, dimostrata nella Sezione 12.29.

Enunciato. Si assuma che:

1. f sia olomorfa nella corona puntata
$$0 < |z - z_0| < R;$$
2. f sia limitata vicino a z_0, cioe' esistano $M > 0$ e $\rho > 0$, con $\rho < R$, tali che
$$|f(z)| \le M \qquad \text{per } 0 < |z - z_0| < \rho.$$

Tesi. Allora z_0 e' una singolarita' rimovibile di f.

Dimostrazione. Consideriamo lo sviluppo di Laurent di f nella corona puntata

$$0 < |z - z_0| < \rho.$$

Scriviamo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dobbiamo mostrare che

$$a_n = 0 \qquad \text{per ogni } n < 0.$$

Fissiamo quindi $k \ge 1$. Il coefficiente a_{-k} e' dato da

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1}\, d\zeta,$$

dove $C_\varepsilon = \{\zeta : \ |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$ e' orientata positivamente, con $0 < \varepsilon < \rho$.

Sulla circonferenza C_ε si ha $|f(\zeta)| \le M$ e

$$|(\zeta - z_0)^{k-1}| = \varepsilon^{k-1}.$$

Inoltre

$$L(C_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon.$$

Applicando la stima ML, otteniamo

$$|a_{-k}| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi\varepsilon\, M\varepsilon^{k-1} = M\varepsilon^k.$$

Stima ML. L'integranda e' $f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k-1}$, il massimo del modulo sulla circonferenza e' al piu' $M\varepsilon^{k-1}$, e la lunghezza della circonferenza e' $2\pi\varepsilon$.

La stima precedente vale per ogni $0 < \varepsilon < \rho$. Mandando $\varepsilon \to 0^+$, otteniamo

$$|a_{-k}| = 0,$$

cioe'

$$a_{-k} = 0.$$

Poiche' $k \geq 1$ era arbitrario, tutti i coefficienti negativi dello sviluppo di Laurent sono nulli. Per la caratterizzazione tramite Laurent, z_0 e' una singolarita' rimovibile.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia nella corona puntata serve per poter sviluppare f in serie di Laurent attorno a z_0.

La limitatezza vicino a z_0 e' l'ipotesi decisiva: permette di stimare l'integrale che definisce a_{-k} con una quantita' $M\varepsilon^k$, che tende a zero quando la circonferenza si restringe verso z_0.

La condizione che la singolarita' sia isolata e' implicita nella presenza della corona puntata. Se intorno a z_0 ci fossero altre singolarita', non si potrebbe applicare Laurent in una corona centrata in z_0.

Osservazione. Il criterio fornisce un metodo pratico: per dimostrare che una singolarita' isolata e' rimovibile non serve costruire subito l'estensione. Basta mostrare che la funzione resta limitata vicino al punto.

12.31 Definizione di residuo

Idea e contesto. Il residuo e' il coefficiente del termine $(z - z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent. Questo coefficiente e' speciale perche' e' l'unico termine della serie di Laurent che contribuisce all'integrale lungo una piccola circonferenza centrata nella singolarita'.

Nota storica. Il metodo dei residui nasce nel quadro della teoria integrale di Cauchy. L'idea decisiva e' che il contributo di una singolarita' a un integrale chiuso possa essere condensato in un solo coefficiente. In questa forma, il residuo diventa il ponte tra lo sviluppo locale di Laurent e il calcolo globale degli integrali complessi.

Definizione. Sia z_0 una singolarita' isolata di f, e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f in una corona puntata centrata in z_0. Si chiama *residuo* di f in z_0 il coefficiente

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

Relazione con l'integrale. Per la formula dei coefficienti di Laurent, se γ e' una circonferenza centrata in z_0, contenuta nella corona puntata e orientata positivamente, allora

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Poiche' $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0)$, otteniamo

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Osservazione. Questa formula e' il primo passo verso il teorema dei residui: un integrale complesso lungo una curva chiusa puo' essere calcolato leggendo i coefficienti $(z - z_k)^{-1}$ degli sviluppi di Laurent nelle singolarita' interne alla curva.

12.32 Teorema dei residui

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema dei residui trasforma un integrale lungo una curva chiusa in una somma locale sulle singolarita' interne. L'informazione rilevante di ogni singolarita' e' solo il coefficiente del termine $(z - z_k)^{-1}$, cioe' il residuo.

Geometricamente, si tolgono piccoli dischi attorno alle singolarita'. Nella regione rimasta la funzione e' olomorfa, quindi l'integrale sul bordo totale e' nullo. Il bordo totale e' formato dalla curva esterna e dai piccoli cerchi interni percorsi con orientazione opposta. Da qui l'integrale globale si riduce alla somma degli integrali sui piccoli cerchi.

Struttura della dimostrazione.

1. Circondare ogni singolarita' z_k con una piccola circonferenza C_k, positiva rispetto al suo centro.
2. Considerare la regione ottenuta togliendo dall'interno di γ i dischi delimitati dai C_k.
3. Applicare Cauchy-Goursat alla regione bucata:
$$\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\,dz = 0.$$
4. Usare la definizione di residuo:
$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(f, z_k).$$
5. Sommare i contributi locali.

Prerequisiti. Servono il teorema di Cauchy-Goursat per regioni senza singolarita' e la definizione di residuo. Usiamo in particolare il fatto che, se C_k e' una piccola circonferenza positiva attorno a z_k, allora

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Serve inoltre l'orientazione del bordo di una regione bucata: il bordo esterno e' percorso positivamente, mentre ciascun bordo interno compare con orientazione negativa.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un aperto;
2. γ sia una curva chiusa semplice, regolare a tratti, contenuta in Ω, orientata positivamente;
3. il dominio D racchiuso da γ, insieme al suo bordo, sia contenuto in Ω;
4. f sia olomorfa in un intorno di $\overline{D}$, eccetto al piu' in un numero finito di singolarita' isolate
$$z_1, \ldots, z_N$$
contenute in D.

Tesi. Allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Dimostrazione. Poiche' le singolarita' sono finite e appartengono all'interno di D, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo affinche' i dischi chiusi

$$\overline{B(z_k, \varepsilon)}, \qquad k = 1, \dots, N,$$

siano contenuti in D, siano a due a due disgiunti e non incontrino γ. Indichiamo con

$$C_k = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_k| = \varepsilon\}, \qquad k = 1, \dots, N,$$

le circonferenze corrispondenti, orientate positivamente rispetto al proprio centro.

Consideriamo la regione

$$D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_k| < \varepsilon\}.$$

In un intorno di $\overline{D_\varepsilon}$ la funzione f e' olomorfa, perche' abbiamo rimosso piccoli dischi attorno a tutte le singolarita'.

Applicando il teorema di Cauchy-Goursat alla regione bucata D_ε, oppure equivalentemente tagliando D_ε lungo segmenti che collegano i piccoli cerchi al bordo esterno e applicando Cauchy-Goursat alla regione semplicemente connessa ottenuta, otteniamo

$$\int_\gamma f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\, dz = 0.$$

Segno. Nel bordo positivo della regione bucata, il bordo esterno γ mantiene l'orientazione positiva, mentre ogni bordo interno viene percorso in senso negativo rispetto al proprio centro. Poiche' C_k e' stato definito con orientazione positiva rispetto a z_k, compare il segno meno.

Quindi

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\, dz.$$

Per la definizione di residuo e la formula integrale associata,

$$\int_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Sostituendo nella formula precedente, segue

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi che le singolarita' siano isolate e finite permette di circondarle con piccoli dischi disgiunti. Se le singolarita' si accumulassero, questa costruzione non sarebbe possibile.

L'olomorfia di f fuori dalle singolarita' serve per applicare Cauchy-Goursat alla regione bucata. In quella regione non devono rimanere altre singolarita'.

L'orientazione positiva di γ fissa il segno $+2\pi i$. Se γ fosse percorsa in senso opposto, il risultato cambierebbe segno.

La richiesta che $D \subset \Omega$ evita che la curva racchiuda punti fuori dal dominio di definizione di f. In quel caso non sarebbe legittimo applicare Cauchy-Goursat alla regione racchiusa dalla curva.

Osservazione. La formula scritta vale per curve semplici orientate positivamente, quindi ogni singolarita' interna viene avvolta una volta. Per curve chiuse piu' generali compare il numero di avvolgimento della curva attorno a ciascuna singolarita'.

12.33 Formule per il calcolo dei residui

Idea della dimostrazione e contesto. Il residuo e' definito come coefficiente del termine $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent. Nelle applicazioni, pero', spesso non conviene scrivere tutto lo sviluppo: per le singolarita' piu' comuni esistono formule dirette.

Le tre formule principali riguardano le singolarita' rimovibili, i poli semplici e i poli di ordine m. In tutti i casi l'obiettivo e' isolare il coefficiente del termine $(z-z_0)^{-1}$.

Struttura della dimostrazione.

1. Nel caso rimovibile usare il fatto che non ci sono termini negativi nello sviluppo di Laurent.
2. Nel caso di polo semplice scrivere $h(z) = (z-z_0)q(z)$, con $q(z_0) = h'(z_0)$.
3. Nel caso di polo di ordine m, porre
$$g(z) = (z-z_0)^m f(z)$$
e leggere il coefficiente a_{-1} tramite il coefficiente di Taylor di ordine $m-1$ di g.

Prerequisiti. Servono la definizione di residuo, la caratterizzazione delle singolarita' isolate tramite Laurent e il fatto che, se
$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n,$$
allora
$$b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Enunciato. Valgono le seguenti formule operative.

1. Se z_0 e' una singolarita' rimovibile di f, allora
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0.$$
2. Se
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$
con g, h olomorfe in un intorno di z_0, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, allora
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$
Se inoltre $g(z_0) \neq 0$, allora z_0 e' un polo semplice. Se invece $g(z_0) = 0$, la singolarita' e' rimovibile e il residuo e' 0.
3. Se z_0 e' un polo di ordine m di f, allora
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]\Big|_{z=z_0}.$$

Dimostrazione. Singolarita' rimovibile. Se z_0 e' rimovibile, lo sviluppo di Laurent non contiene termini negativi:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$
In particolare manca il termine $(z-z_0)^{-1}$. Quindi
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0.$$

Polo semplice. Poiche' $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, lo zero di h in z_0 e' semplice. Possiamo scrivere

$$h(z) = (z - z_0)q(z),$$

dove q e' olomorfa in un intorno di z_0 e

$$q(z_0) = h'(z_0) \neq 0.$$

Allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)q(z)} = \frac{1}{z - z_0}\frac{g(z)}{q(z)}.$$

La funzione

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{q(z)}$$

e' olomorfa in un intorno di z_0. Dunque

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \varphi_1(z - z_0) + \cdots$$

e quindi

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{z - z_0} + \varphi_1 + \cdots .$$

Il coefficiente del termine $(z - z_0)^{-1}$ e'

$$\varphi(z_0) = \frac{g(z_0)}{q(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Pertanto

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Polo di ordine m. Poiche' z_0 e' un polo di ordine m, la funzione

$$G(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

si estende olomorficamente in un intorno di z_0, con $G(z_0) \neq 0$. Scriviamo il suo sviluppo di Taylor:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n.$$

Allora

$$f(z) = \frac{G(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^{n-m}.$$

Il termine $(z - z_0)^{-1}$ si ottiene quando

$$n - m = -1, \qquad \text{cioe'} \qquad n = m - 1.$$

Quindi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{m-1}.$$

Poiche' b_{m-1} e' il coefficiente di Taylor di ordine $m - 1$ di G,

$$b_{m-1} = \frac{G^{(m-1)}(z_0)}{(m - 1)!}.$$

Sostituendo $G(z) = (z - z_0)^m f(z)$, otteniamo

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m - 1)!}\, \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]\Big|_{z=z_0}.$$

Ruolo delle ipotesi. Nel caso rimovibile, l'ipotesi elimina tutta la parte principale di Laurent, quindi elimina anche il coefficiente a_{-1}.

Nel caso del polo semplice, la condizione $h'(z_0) \neq 0$ garantisce che h abbia uno zero semplice e che il fattore residuo $q(z_0)$ non sia nullo. Senza questa ipotesi il polo potrebbe avere ordine maggiore.

Nel caso del polo di ordine m, la moltiplicazione per $(z-z_0)^m$ trasforma la parte singolare in una funzione olomorfa. La derivata di ordine $m-1$ serve a estrarre esattamente il coefficiente che diventa il residuo.

Osservazione. La formula del polo semplice e' il caso piu' usato nei calcoli. La formula per il polo di ordine m e' piu' generale, ma richiede derivate di ordine superiore e conviene usarla solo quando la singolarita' non e' semplice.

12.34 Lemma di Jordan

Idea della dimostrazione e contesto. Il lemma di Jordan serve negli integrali calcolati con il teorema dei residui quando compare un fattore oscillante del tipo e^{iaz}. Nel semipiano superiore, se $a > 0$, questo fattore non e' solo oscillante: sull'arco

$$z = Re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

vale

$$|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\theta}.$$

Quindi, tranne vicino agli estremi dell'arco, il fattore esponenziale produce decadimento. Il lemma mostra che questo decadimento basta ad annullare il contributo dell'arco grande, pur avendo lunghezza proporzionale a R.

Nota storica. Il lemma e' associato a Camille Jordan (1838–1922), una figura centrale dell'analisi e della topologia ottocentesca. Nella pratica dell'analisi complessa, questo risultato divenne uno strumento standard per trasformare integrali reali oscillanti in integrali di contorno e poi applicare il teorema dei residui.

Struttura della dimostrazione.

1. Parametrizzare la semicirconferenza superiore con $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
2. Stimare il modulo:
$$|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\theta}.$$
3. Usare la stima elementare
$$\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{aR}.$$
4. Stimare direttamente l'integrale parametrizzato sull'arco.

Prerequisiti. Servono la definizione di integrale complesso lungo una curva parametrizzata e la stima ML. Serve inoltre la seguente stima elementare: per $\lambda > 0$,

$$\int_0^\pi e^{-\lambda\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

Infatti, per simmetria,

$$\int_0^\pi e^{-\lambda\sin\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\sin\theta}\, d\theta.$$

Per $0 \leq \theta \leq \pi/2$ vale

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta.$$

Quindi

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\sin\theta}\, d\theta \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda}{\pi}\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \leq \frac{\pi}{\lambda}.$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $a > 0$;
2. C_R sia la semicirconferenza superiore
$$C_R = \{Re^{i\theta} : \ 0 \leq \theta \leq \pi\},$$
orientata in senso antiorario;
3. f sia olomorfa nel semipiano superiore, eccetto eventualmente in singolarita' isolate;
4. per $R \to +\infty$ valga
$$M_R := \max_{z \in C_R} |f(z)| \to 0.$$

Tesi. Allora
$$\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, dz \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty.$$

Dimostrazione. Parametrizziamo l'arco con
$$z = Re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$
Allora
$$dz = iRe^{i\theta}\, d\theta, \qquad |dz| = R\, d\theta.$$
Inoltre
$$|e^{iaz}| = |e^{iaRe^{i\theta}}| = |e^{iaR\cos\theta - aR\sin\theta}| = e^{-aR\sin\theta}.$$
Usando la parametrizzazione e prendendo il modulo, otteniamo
$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} |f(Re^{i\theta})|\, R\, d\theta.$$
Per definizione di M_R,
$$|f(Re^{i\theta})| \leq M_R \qquad \text{per } 0 \leq \theta \leq \pi.$$
Quindi
$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, dz \right| \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}\, d\theta.$$
Applicando la stima richiamata nei prerequisiti con $\lambda = aR$, otteniamo
$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, dz \right| \leq RM_R \frac{\pi}{aR} = \frac{\pi}{a} M_R.$$
Poiche' $M_R \to 0$, segue
$$\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\, dz \to 0 \qquad \text{per } R \to +\infty.$$

Ruolo delle ipotesi. L'ipotesi $a > 0$ e' essenziale per chiudere il contorno nel semipiano superiore: solo in questo caso
$$|e^{iaz}| = e^{-a\ \mathrm{Im}\, z}$$
decresce quando $\mathrm{Im}\, z > 0$. Se $a < 0$, il decadimento avviene nel semipiano inferiore.

La condizione $M_R \to 0$ controlla la parte non esponenziale dell'integranda. Il punto del lemma e' che non serve chiedere $RM_R \to 0$: il fattore $e^{-aR\sin\theta}$ compensa la lunghezza dell'arco.

L'olomorfia di f non entra direttamente nella stima sull'arco, ma e' l'ipotesi che permette poi di applicare il teorema dei residui al contorno chiuso formato dal segmento reale e dalla semicirconferenza.

Osservazione. Per integrali con fattore e^{iaz}, se $a > 0$ si chiude di norma nel semipiano superiore; se $a < 0$, si chiude nel semipiano inferiore. Il lemma di Jordan giustifica il fatto che il contributo dell'arco grande scompare.

12.35 Teorema dell'applicazione aperta

Idea della dimostrazione e contesto. Il teorema dell'applicazione aperta afferma che una funzione olomorfa non costante manda aperti in aperti. Questo e' un altro modo di esprimere la rigidita' delle funzioni olomorfe: una funzione olomorfa non costante non puo' schiacciare localmente un aperto in un insieme senza interno.

L'idea locale e' la seguente. Fissato z_0, si guarda la funzione

$$f(z) - f(z_0).$$

Poiche' f non e' costante, lo zero in z_0 ha un ordine finito:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Quindi, su una piccola circonferenza centrata in z_0, il valore $|f(z) - f(z_0)|$ e' separato da zero. Se un valore w e' abbastanza vicino a $f(z_0)$, allora la funzione $f - w$ e' piu' piccola al centro che sul bordo. Se $f - w$ non avesse zeri nel disco, il principio del minimo modulo produrrebbe una contraddizione. Dunque w deve appartenere all'immagine del disco.

Nota storica. Il teorema dell'applicazione aperta e' uno dei risultati classici della teoria locale delle funzioni olomorfe. Insieme al teorema dell'identita' e ai principi di massimo e minimo modulo, mostra quanto il comportamento locale di una funzione olomorfa sia piu' rigido di quello di una funzione reale derivabile.

Struttura della dimostrazione.

1. Fissare un punto $z_0 \in \Omega$ e un intorno U di z_0.
2. Scegliere un piccolo disco chiuso $\overline{B(z_0, r)} \subset U$.
3. Usare l'ordine dello zero di $f(z) - f(z_0)$ per ottenere
$$f(z) \neq f(z_0) \qquad \text{su } |z - z_0| = r.$$
4. Porre
$$\eta = \min_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)| > 0.$$
5. Dimostrare che ogni w con $|w - f(z_0)| < \eta/2$ appartiene a $f(B(z_0, r))$, usando il principio del minimo modulo.

Prerequisiti. Servono il teorema sull'ordine di uno zero, dimostrato nella Sezione 12.18, il teorema dell'identita', dimostrato nella Sezione 12.20, e il principio del minimo modulo, dimostrato nella Sezione 12.22.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un dominio;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. f non sia costante in Ω.

Tesi. Allora f e' un'applicazione aperta: per ogni aperto $A \subseteq \Omega$, l'immagine $f(A)$ e' aperta in $\mathbb{C}$.

In forma locale, se $z_0 \in \Omega$ e $U \subseteq \Omega$ e' un intorno di z_0, allora $f(U)$ contiene un intorno di $f(z_0)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la forma locale. Sia $z_0 \in \Omega$ e sia $U \subseteq \Omega$ un intorno di z_0. Scegliamo $r > 0$ tale che
$$\overline{B(z_0, r)} \subset U.$$

Consideriamo
$$h(z) = f(z) - f(z_0).$$
Poiche' f non e' costante in Ω, la funzione h non puo' essere identicamente nulla in un intorno di z_0. Altrimenti f sarebbe costante in un intorno di z_0, e per il teorema dell'identita' sarebbe costante in tutto Ω, contro l'ipotesi.

Possiamo quindi applicare il teorema sull'ordine dello zero a h. Esistono un intero $m \geq 1$ e una funzione g, olomorfa in un intorno di z_0, tali che
$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$
Riducendo eventualmente r, possiamo supporre anche che
$$g(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in \overline{B(z_0, r)}.$$
Allora
$$f(z) \neq f(z_0) \qquad \text{per ogni } z \in \partial B(z_0, r).$$
Per continuita' e compattezza della circonferenza, il minimo
$$\eta = \min_{z \in \partial B(z_0, r)} |f(z) - f(z_0)|$$
esiste ed e' positivo.

Mostriamo che
$$B\left(f(z_0), \frac{\eta}{2}\right) \subseteq f(B(z_0, r)).$$
Sia quindi $w \in \mathbb{C}$ tale che
$$|w - f(z_0)| < \frac{\eta}{2}.$$
Vogliamo dimostrare che esiste $z \in B(z_0, r)$ con $f(z) = w$.

Supponiamo per assurdo che $f(z) \neq w$ per ogni $z \in B(z_0, r)$. Allora la funzione
$$\varphi(z) = f(z) - w$$
e' olomorfa e non si annulla in $B(z_0, r)$. Sul bordo del disco si ha
$$|\varphi(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - f(z_0)| - |w - f(z_0)| > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}.$$
Al centro, invece,
$$|\varphi(z_0)| = |f(z_0) - w| < \frac{\eta}{2}.$$
Quindi il minimo di $|\varphi|$ nel disco chiuso $\overline{B(z_0, r)}$ non puo' essere raggiunto sul bordo. Esso viene raggiunto in un punto interno.

Poiche' φ e' olomorfa e non si annulla in $B(z_0, r)$, il principio del minimo modulo implica che φ e' costante in $B(z_0, r)$. Dunque f e' costante in $B(z_0, r)$, e ancora per il teorema dell'identita' f sarebbe costante in Ω, contro l'ipotesi.

La contraddizione mostra che esiste almeno un punto $z \in B(z_0, r)$ tale che
$$f(z) = w.$$
Quindi $w \in f(B(z_0, r))$. Abbiamo dimostrato che $f(U)$ contiene un intorno di $f(z_0)$.

La forma globale segue subito. Se $A \subseteq \Omega$ e' aperto e $w_0 \in f(A)$, allora esiste $z_0 \in A$ tale che $w_0 = f(z_0)$. Applicando la forma locale con $U = A$, troviamo un intorno di w_0 contenuto in $f(A)$. Dunque $f(A)$ e' aperto.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia serve per usare l'ordine dello zero e il principio del minimo modulo. Per funzioni continue o reali differenziabili, l'immagine di un aperto puo' non essere aperta.

L'ipotesi che f non sia costante e' essenziale. Una funzione costante manda ogni aperto in un singolo punto, che non e' un aperto di $\mathbb{C}$.

La connessione di Ω serve per usare il teorema dell'identita' nella forma globale: se f fosse costante in un piccolo disco, allora sarebbe costante in tutto il dominio.

Osservazione. Il teorema dell'applicazione aperta dice che una funzione olomorfa non costante conserva localmente la natura bidimensionale degli aperti. Anche in presenza di zeri della derivata, l'immagine di un piccolo disco resta un intorno del valore centrale; l'effetto di uno zero della derivata e' cambiare la molteplicita' locale, non distruggere l'apertura dell'immagine.

12.36 Teorema dell'inversa olomorfa

Idea della dimostrazione e contesto. Una funzione olomorfa iniettiva non solo ammette un'inversa come funzione insiemistica, ma ha un'inversa ancora olomorfa. Questo risultato e' il ponte tra olomorfia e cambiamenti di coordinate conformi: localmente, quando la derivata non si annulla, una funzione olomorfa si comporta come una mappa invertibile che conserva la struttura complessa.

Il primo punto da dimostrare e' che l'iniettivita' forza

$$f'(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Infatti, se $f'(z_0) = 0$, lo sviluppo locale di $f(z) - f(z_0)$ comincerebbe con una potenza $(z - z_0)^m$ con $m \geq 2$. Questo produce localmente piu' preimmagini dello stesso valore, in contrasto con l'iniettivita'.

Nota storica. Il teorema dell'inversa olomorfa e' la versione complessa del principio di invertibilita' locale. Nella teoria delle trasformazioni conformi assume un ruolo centrale: le funzioni olomorfe iniettive sono precisamente le mappe che forniscono cambiamenti di coordinate complessi regolari, con inversa ancora olomorfa.

Struttura della dimostrazione.

1. Usare l'iniettivita' per mostrare che f non e' costante.
2. Applicare il teorema dell'applicazione aperta per ottenere che $f(\Omega)$ e' aperto.
3. Dimostrare che $f'(z_0) \neq 0$ per ogni $z_0 \in \Omega$, usando l'ordine dello zero di $f(z) - f(z_0)$.
4. Fissare $w_0 = f(z_0)$ e calcolare la derivata dell'inversa tramite il rapporto incrementale.
5. Ottenere
$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Prerequisiti. Servono il teorema dell'applicazione aperta, dimostrato nella Sezione 12.35, e il teorema sull'ordine di uno zero, dimostrato nella Sezione 12.18. Useremo inoltre il fatto elementare che una funzione olomorfa e iniettiva non puo' essere costante, se il dominio contiene piu' di un punto.

Useremo anche il seguente fatto locale: se g e' olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0) \neq 0$, allora, restringendo l'intorno se necessario, esiste una funzione olomorfa q tale che

$$q(z)^m = g(z).$$

Infatti, poiche' $g(z_0) \neq 0$, in un piccolo intorno di z_0 la funzione g non si annulla. Su tale intorno si puo' scegliere un ramo olomorfo del logaritmo di g, e quindi porre

$$q(z) = \exp\left(\frac{1}{m} \operatorname{Log} g(z)\right).$$

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sia un dominio;
2. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω;
3. f sia iniettiva.

Tesi. Allora:

1. $f(\Omega)$ e' aperto;
2. $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$;
3. l'inversa
$$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$$
e' olomorfa;
4. per ogni $w \in f(\Omega)$ vale
$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Dimostrazione. Poiche' f e' iniettiva, non e' costante. Per il teorema dell'applicazione aperta, l'immagine

$$f(\Omega)$$

e' un aperto di $\mathbb{C}$.

Mostriamo ora che f' non si annulla mai. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e consideriamo

$$h(z) = f(z) - f(z_0).$$

La funzione h e' olomorfa e si annulla in z_0. Poiche' f e' iniettiva, z_0 e' l'unico zero di h. In particolare h non e' identicamente nulla in nessun intorno di z_0. Per il teorema sull'ordine di uno zero, esistono un intero $m \geq 1$ e una funzione g, olomorfa in un intorno di z_0, tali che

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$

Vogliamo mostrare che deve essere $m = 1$. Supponiamo per assurdo che $m \geq 2$. Poiche' $g(z_0) \neq 0$, scegliamo un ramo olomorfo locale della radice m-esima di g, cioe' una funzione q olomorfa in un intorno di z_0 tale che

$$q(z)^m = g(z).$$

Allora, in un intorno di z_0,
$$f(z) - f(z_0) = \big((z - z_0)q(z)\big)^m.$$

Poniamo
$$\Phi(z) = (z - z_0)q(z).$$

Si ha $\Phi(z_0) = 0$ e
$$\Phi'(z_0) = q(z_0) \neq 0.$$

Poiche' Φ e' olomorfa e non costante, il teorema dell'applicazione aperta implica che l'immagine di ogni intorno di z_0 tramite Φ contiene un intorno di 0. Scegliamo allora un numero $a \neq 0$ abbastanza piccolo in tale intorno. I due valori distinti
$$a \qquad \text{e} \qquad ae^{2\pi i/m}$$

hanno la stessa potenza m-esima. Prendendo le loro preimmagini tramite Φ, otteniamo due punti distinti z_1, z_2 arbitrariamente vicini a z_0 tali che

$$\Phi(z_1)^m = \Phi(z_2)^m.$$

Quindi
$$f(z_1) = f(z_2),$$
contro l'iniettivita' di f. Dunque $m = 1$.

Poiche' $m = 1$, la fattorizzazione locale diventa
$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)g(z), \qquad g(z_0) \neq 0.$$
Dividendo per $z - z_0$ e passando al limite per $z \to z_0$, otteniamo
$$f'(z_0) = g(z_0) \neq 0.$$
Poiche' z_0 era arbitrario,
$$f'(z) \neq 0 \qquad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Resta da dimostrare che l'inversa e' olomorfa e calcolare la sua derivata. Sia
$$w_0 \in f(\Omega)$$
e poniamo
$$z_0 = f^{-1}(w_0).$$
Per $w \in f(\Omega)$, $w \neq w_0$, poniamo $z = f^{-1}(w)$. Allora $w = f(z)$. Inoltre f^{-1} e' continua, perche' f e' aperta e iniettiva: se $U \subseteq \Omega$ e' aperto, allora
$$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$$
e' aperto in $f(\Omega)$. Dunque $w \to w_0$ implica
$$z = f^{-1}(w) \to z_0 = f^{-1}(w_0).$$

Calcoliamo il rapporto incrementale:
$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)^{-1}.$$
Facendo $w \to w_0$, cioe' $z \to z_0$, otteniamo
$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$
Poiche' $z_0 = f^{-1}(w_0)$, questo si riscrive come
$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$
Dato che w_0 era arbitrario, f^{-1} e' derivabile in senso complesso in ogni punto di $f(\Omega)$, dunque e' olomorfa in $f(\Omega)$.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia di f serve sia per applicare il teorema dell'applicazione aperta sia per usare la fattorizzazione tramite l'ordine dello zero. Per una funzione reale differenziabile iniettiva, l'inversa puo' non avere la stessa regolarita' senza ipotesi aggiuntive.

L'iniettivita' e' essenziale per definire un'inversa su $f(\Omega)$. Inoltre forza $f'(z) \neq 0$: se localmente comparisse una potenza di ordine $m \geq 2$, la funzione assumerebbe lo stesso valore in piu' punti vicini.

La connessione di Ω serve nei risultati globali usati nella dimostrazione, in particolare nel teorema dell'applicazione aperta e nelle conclusioni tramite identita'.

Osservazione. Il teorema dell'inversa olomorfa mostra che le funzioni olomorfe iniettive sono isomorfismi olomorfi tra il dominio Ω e l'aperto $f(\Omega)$. La formula
$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$
e' la stessa formula nota dal calcolo reale, ma qui e' conseguenza della struttura complessa e del fatto che l'immagine di una funzione olomorfa non costante e' aperta.

12.37 Prolungamento analitico: definizione e unicita'

Idea della dimostrazione e contesto. Il prolungamento analitico formalizza l'idea di estendere una funzione olomorfa oltre il dominio in cui e' stata inizialmente definita. Il punto centrale e' che, se un prolungamento esiste, allora e' unico sul dominio connesso in cui viene costruito.

Questa unicita' e' una conseguenza diretta del teorema dell'identita'. Infatti, se due funzioni olomorfe coincidono sul dominio iniziale, allora coincidono su un insieme con punti di accumulazione interni al dominio piu' grande. Il teorema dell'identita' forza quindi le due funzioni a coincidere ovunque.

Definizione. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ domini tali che

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2.$$

Nel caso $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$, si parla propriamente di prolungamento a un dominio piu' grande.

Sia $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω_1. Una funzione

$$F : \Omega_2 \to \mathbb{C}$$

si dice *prolungamento analitico* di f da Ω_1 a Ω_2 se:

1. F e' olomorfa in Ω_2;
2. F coincide con f su Ω_1, cioe'
$$F(z) = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in \Omega_1.$$

Struttura della dimostrazione.

1. Prendere due prolungamenti F_1 e F_2 allo stesso dominio Ω_2.
2. Osservare che F_1 e F_2 coincidono su Ω_1.
3. Usare il fatto che Ω_1, essendo aperto e non vuoto, contiene punti di accumulazione interni a Ω_2.
4. Applicare il teorema dell'identita' in Ω_2.

Prerequisiti. Serve il teorema dell'identita', dimostrato nella Sezione 12.20. Useremo inoltre il fatto elementare che un aperto non vuoto del piano complesso contiene punti di accumulazione.

Enunciato. Si assuma che:

1. $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ siano domini;
2. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$;
3. $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in Ω_1;
4. $F_1, F_2 : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ siano due prolungamenti analitici di f da Ω_1 a Ω_2.

Tesi. Allora

$$F_1 \equiv F_2 \qquad \text{in } \Omega_2.$$

Dimostrazione. Poiche' F_1 e F_2 sono prolungamenti analitici di f, entrambe sono olomorfe in Ω_2 e coincidono con f su Ω_1. Quindi

$$F_1(z) = F_2(z) \qquad \text{per ogni } z \in \Omega_1.$$

Consideriamo l'insieme

$$E = \{z \in \Omega_2 : \; F_1(z) = F_2(z)\}.$$

Allora $\Omega_1 \subseteq E$. Poiche' Ω_1 e' un aperto non vuoto, ogni suo punto e' punto di accumulazione di Ω_1. Scegliamo dunque $z_* \in \Omega_1$. Siccome $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, il punto z_* e' interno a Ω_2.

Le funzioni F_1 e F_2 sono olomorfe nel dominio Ω_2, e l'insieme dei punti in cui coincidono ha un punto di accumulazione interno a Ω_2. Per il teorema dell'identita',

$$F_1 \equiv F_2 \qquad \text{in } \Omega_2.$$

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia di F_1 e F_2 in Ω_2 e' cio' che permette di usare il teorema dell'identita'. Senza olomorfia, due estensioni possono coincidere su un aperto e poi differire altrove.

La connessione di Ω_2 e' essenziale. Se Ω_2 avesse piu' componenti, il prolungamento sarebbe fissato sulla componente che contiene Ω_1, ma potrebbe essere scelto liberamente sulle altre componenti.

L'inclusione $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ serve per confrontare f con i suoi prolungamenti sul dominio iniziale. Il fatto che Ω_1 sia aperto garantisce che l'insieme di coincidenza abbia punti di accumulazione interni.

Osservazione. Il teorema dimostra unicita', non esistenza. Stabilire se un prolungamento analitico esiste e' un problema diverso e spesso piu' delicato: possono esserci ostacoli dovuti a singolarita', tagli del dominio o fenomeni di monodromia. Quando pero' il prolungamento esiste su un dominio connesso, il teorema dell'identita' garantisce che non ci siano due scelte diverse.

12.38 Principio di riflessione di Schwarz

Idea della dimostrazione e contesto. Il principio di riflessione di Schwarz permette di prolungare una funzione olomorfa definita sopra un tratto dell'asse reale riflettendola sotto l'asse. La condizione decisiva e' che sul tratto reale la funzione assuma valori reali: in questo modo la funzione e la sua riflessione complessa si incollano senza salti sul bordo.

La formula di riflessione e'

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} \qquad \text{per } \operatorname{Im} z < 0.$$

Geometricamente, si riflette il punto z rispetto all'asse reale, si valuta f nel punto riflesso e poi si riflette anche il valore. Il punto delicato non e' l'olomorfia separata nei due semidischi, ma l'olomorfia attraverso l'asse reale. Per questo useremo il teorema di Morera.

Nota storica. Il principio prende il nome da Hermann Amandus Schwarz, matematico tedesco dell'Ottocento. Risultati di riflessione di questo tipo sono diventati strumenti standard nello studio delle funzioni olomorfe e delle trasformazioni conformi, soprattutto quando il comportamento al bordo e' sufficientemente regolare.

Struttura della dimostrazione.

1. Definire F nel disco intero riflettendo f nel semidisco inferiore.
2. Verificare che F e' continua anche sull'asse reale.
3. Verificare che F e' olomorfa separatamente nel semidisco superiore e in quello inferiore.
4. Applicare Morera: per ogni triangolo contenuto nel disco, mostrare che
$$\int_{\partial\Delta} F(z)\,dz = 0.$$
5. Per i triangoli che attraversano l'asse reale, tagliare una piccola striscia orizzontale attorno all'asse e poi mandarne lo spessore a zero.

Prerequisiti. Serve il teorema di Morera, dimostrato nella Sezione 12.25. Serve inoltre il fatto che, se f e' olomorfa in un aperto U, allora la funzione $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ e' olomorfa nell'aperto riflesso $\overline{U} = \{z : \overline{z} \in U\}$. Questo si verifica direttamente sviluppando localmente f in serie di potenze oppure usando le equazioni di Cauchy-Riemann.

Enunciato. Sia $R > 0$ e poniamo

$$D^+ = \{z \in B(0,R) : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Si assuma che:

1. $f : D^+ \to \mathbb{C}$ sia olomorfa in D^+;
2. f ammetta un'estensione continua a $D^+ \cup (-R,R)$;
3. per tale estensione valga
$$f(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{per ogni } x \in (-R,R).$$

Tesi. La funzione $F : B(0,R) \to \mathbb{C}$ definita da

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

e' olomorfa in tutto il disco $B(0,R)$. In particolare, F e' un prolungamento analitico di f dal semidisco superiore al disco intero.

Dimostrazione. Per costruzione, $F = f$ nel semidisco superiore. Nel semidisco inferiore, invece,

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Poiche' f e' olomorfa in D^+, la funzione riflessa $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ e' olomorfa nel semidisco inferiore. Dunque F e' olomorfa separatamente sopra e sotto l'asse reale.

Mostriamo ora che F e' continua sull'asse reale. Se $x \in (-R,R)$, allora dal semipiano superiore si ha

$$F(z) \to f(x) \qquad \text{per } z \to x,\ \operatorname{Im} z > 0.$$

Dal semipiano inferiore, invece,

$$F(z) = \overline{f(\overline{z})} \to \overline{f(x)}.$$

Poiche' $f(x) \in \mathbb{R}$, si ha $\overline{f(x)} = f(x)$. Quindi i due limiti coincidono, e F e' continua anche sul diametro reale.

Per concludere l'olomorfia attraverso l'asse reale, applichiamo il teorema di Morera. Sia Δ un triangolo chiuso contenuto in $B(0,R)$. Dobbiamo dimostrare che

$$\int_{\partial\Delta} F(z)\,dz = 0.$$

Se Δ e' contenuto interamente in uno dei due semidischi aperti, la conclusione segue dal teorema di Cauchy-Goursat, perche' F e' olomorfa in quel semidisco.

Resta il caso in cui Δ incontri l'asse reale. Per $\varepsilon > 0$ piccolo, tagliamo Δ eliminando la striscia

$$\{z : \ |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}.$$

Le parti di Δ che rimangono sopra la retta $\operatorname{Im} z = \varepsilon$ e sotto la retta $\operatorname{Im} z = -\varepsilon$ sono regioni poligonali, eventualmente vuote, contenute rispettivamente nel semidisco superiore e nel semidisco inferiore. Su ciascuna di esse F e' olomorfa. Applicando Cauchy-Goursat ai loro bordi e sommando, otteniamo

$$0 = \int_{\partial\Delta_\varepsilon^+} F(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_\varepsilon^-} F(z)\,dz.$$

Il bordo di queste due regioni e' formato dai pezzi di $\partial\Delta$ esterni alla striscia e dai segmenti orizzontali di taglio. I pezzi di $\partial\Delta$ tendono, per $\varepsilon \to 0^+$, all'intero bordo $\partial\Delta$. I segmenti orizzontali di taglio, invece, tendono ai segmenti di $\Delta \cap \mathbb{R}$ con orientazioni opposte.

Rendiamo esplicito il motivo per cui i contributi dei tagli si cancellano nel limite. La funzione F e' continua sul compatto Δ, quindi e' uniformemente continua. I punti corrispondenti dei segmenti di taglio superiore e inferiore distano 2ε; di conseguenza i valori di F su tali segmenti diventano uniformemente vicini per $\varepsilon \to 0^+$. Poiche' i due segmenti sono percorsi con orientazioni opposte, la somma dei loro contributi tende a zero.

Passando quindi al limite per $\varepsilon \to 0^+$, otteniamo

$$\int_{\partial\Delta} F(z)\,dz = 0.$$

Per il teorema di Morera, F e' olomorfa in $B(0, R)$.

Ruolo delle ipotesi. L'olomorfia di f nel semidisco superiore serve per avere l'olomorfia di F sopra l'asse e, tramite riflessione, sotto l'asse.

La continuita' fino al diametro reale serve per incollare le due definizioni di F lungo l'asse. Senza continuita' al bordo, la funzione riflessa potrebbe non raccordarsi con la funzione originale.

La condizione $f(x) \in \mathbb{R}$ sul diametro reale e' essenziale perche' garantisce

$$\overline{f(x)} = f(x).$$

Senza questa condizione, il limite dal basso sarebbe $\overline{f(x)}$, che in generale non coincide con il limite dall'alto $f(x)$.

Osservazione. Il principio di riflessione di Schwarz e' un risultato di prolungamento analitico: non si limita a definire una funzione simmetrica, ma garantisce che la funzione riflessa e' davvero olomorfa anche attraverso il bordo reale. In forme piu' generali, lo stesso principio vale per archi analitici e non solo per segmenti dell'asse reale, dopo un opportuno cambiamento conforme di coordinate.

12.39 Serie di Fourier

Da includere.

1. Definizione dei coefficienti di Fourier.
2. Teorema di convergenza puntuale.
3. Identita' di Parseval.
4. Convergenza in L^2.

12.40 Trasformata di Fourier

Da includere.

1. Teorema di inversione.
2. Teorema di Plancherel.
3. Proprieta' operative della trasformata di Fourier.
4. Teorema della convoluzione.
5. Relazione
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = 2\pi f(-x)$$
con la convenzione usata in queste note.
6. Regolarita' della trasformata a partire dai momenti di f.

12.41 Distribuzioni

Da includere.

1. Definizione di distribuzione.
2. Derivata distribuzionale.
3. Delta di Dirac e sue derivate.
4. Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione regolare.
5. Formula per $\delta(g(x))$ con zeri semplici.
6. Trasformata di Fourier in senso distribuzionale.

12.42 Trasformate di Laplace e trasformata Z

Da includere.

1. Esistenza della trasformata di Laplace e ascissa di convergenza.
2. Teorema della convoluzione per Laplace.
3. Trasformazione di problemi di Cauchy in equazioni algebriche.
4. Definizione e regione di convergenza della trasformata Z.
5. Proprieta' operative della trasformata Z.
6. Risoluzione di equazioni alle differenze tramite trasformata Z.